Beitrag zum Satz von Picard - Borel - Nevanlinna auf Riemannschen Flächen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Heinrich Begehr

aus Halle an der Saale

1968

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e.V.

DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE

1 Berlin 33, Garystr. 45

Beitrag zum Satz von Picard-Borel-Nevanlinna auf Riemannschen Flächen

Inaugural-Dissertation

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Heinrich Begehr

aus Halle an der Saale

1. Referent: Professor Dr. A. Dinghas

2. Referent: Professor Dr. H. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung: 5. 7. 1968

Tag der Promotion: 2 8. OKT. 1968

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. A. Dinghas, danke ich für die Anregungen zu dieser Arbeit. Vor allem seine Vorlesungen und seine stete Anteilnahme an meiner Fortbildung haben mein Studium wesentlich beeinflußt.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung. 1

Kapitel 1

Zusammenhänge um den Satz von Picard - Borel - Nevanlinna . . . 3

Kapitel 2

Hilfsfunktionen auf Riemannschen Flächen. 10

1. Potentialfunktionen auf R_p-Flächen. 10
2. Nachbarschaftsfunktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen 12

Kapitel 3

Die beiden Werteverteilungsungleichungen 15

1. Vorbereitende Tatsachen und Begriffsbildungen . . 15
2. Charakterisierung der Abbildungen mit Weierstraß-Eigenschaft 18
3. Die erste Werteverteilungsungleichung 20
4. Die zweite Werteverteilungsungleichung. 26
5. Spezialfälle. 33

Kapitel 4

Folgerungen aus der zweiten Werteverteilungsungleichung . . . 37

1. Die Affinitätsrelation. 37
2. Der Picard - Borel - Nevanlinnasche Satz. 39

Kapitel 5

Spezielle Defektbildungen 41

1. Die zweite Werteverteilungsungleichung. 41
2. Die Affinitätsrelation. 45

Anhang

Abhängigkeit der δ_α-Defekte vom Pol der Kapazitätsfunktion. . 48

Literaturverzeichnis. 50

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546510_0086

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Verallgemeinerung des Picard - Borel - Nevanlinnaschen Satzes durch A. Dinghas [9], die sich ohne Mühe auf die Nevanlinna - af Hällströmsche Theorie übertragen läßt (vergl. [9], S. 251), auf analytische Abbildungen von R_p-Flächen (vergl. [42], S. 30 ff.) in beliebige Riemannsche Flächen auszudehnen. Die Einschränkung auf R_p-Flächen ist notwendig, da es im Gegensatz zum allgemeinen Fall für sie Parameter gibt, durch die man eine Ausschöpfung der Fläche erhält. Als Grundlage dienen neben der ursprünglichen Nevanlinnaschen Monographie [27] vor allem die erwähnte Arbeit von A. Dinghas [9] und das kürzlich erschienene Buch von L. Sario und K. Noshiro [42].

Zum Beweis der zweiten Werteverteilungsungleichung wird hier die von L. Sario (vergl. [36] und [42], S. 19 und S. 61) modifizierte potentialtheoretische Methode von L. Ahlfors [1] herangezogen und nicht die von A. Dinghas [9] verwendete topologisch - metrische Theorie der Überlagerungsflächen [2]. Der verallgemeinerte Satz von Picard - Borel - Nevanlinna wird aus dieser Ungleichung abgeleitet, die die von L. Sario für R_p-Flächen [42], von A. Dinghas [9], von G. af Hällström [15] und von R. Nevanlinna [27] als Spezialfälle enthält. Die Beweise der zweiten Werteverteilungsungleichung für beide Fälle (parabolische und hyperbolische R_p-Flächen) sind einander so ähnlich, daß man sie mit Hilfe eines von A. Dinghas [8] gegebenen Kunstgriffs zu einer Schlußweise zusammenfassen kann. Dabei führen die Abschätzungen zu einer möglichst scharfen Form. Aus ihr leitet sich eine insofern erweiterte Defektrelation

ab, als die sich ergebenden Defekte nicht kleiner als die Nevanlinnaschen sind, ihre Summe jedoch stets durch denselben Wert nach oben beschränkt bleibt.

A. Dinghas hat eine weitere Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriffs und der Nevanlinnaschen Defektrelation gegeben (vergl. [8] und [9]), die in den vorangehenden Entwicklungen nicht enthalten ist. Danach kann man für jede Zahl α aus dem Intervall $[0,1]$ eine Funktion δ_α definieren, die die defekten Werte einer analytischen Abbildung angibt. Bekanntlich hängt der Nevanlinnasche Defektbegriff, der sich hier für $\alpha = 1$ einordnet, im allgemeinen von der Festlegung des Ursprungs der Ausschöpfungsfolge ab (vergl. [11], [31] und [51]). Daß auch die anderen δ_α-Defekte, insbesondere also der (maximale) δ_0-Defekt, diese Abhängigkeit aufweisen, läßt sich mit Hilfe des Duguéschen Beispiels [11] zeigen und soll hier zum Schluß bewiesen werden.

Um die Zusammenhänge um den Satz von Picard - Borel - Nevanlinna aufzuzeigen, wird am Anfang der Arbeit ein kurzer Überblick über die Entwicklung vom Satz von Weierstraß und von dem Picardschen Satz mit seinen Ausdehnungen durch J. Hadamard, E. Borel und R. Nevanlinna bis zu den Verallgemeinerungen von A. Dinghas und L. Sario die dieser Arbeit zugrunde liegen, gegeben.

Erstes Kapitel

Zusammenhänge um den Satz von Picard - Borel - Nevanlinna

Der erste Hauptsatz der klassischen Nevanlinnaschen Werteverteilungstheorie lehrt, daß das Verhalten einer nichtkonstanten meromorphen Funktion gegenüber allen Werten der vollen komplexen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$ in folgendem Sinn symmetrisch ist. Beachtet man "die totale Affinität der Funktion zum Wert a", die durch das Vorhandensein von a-Stellen ebenso wie durch die Stärke der mittleren Konvergenz der Funktion gegen den Wert a charakterisiert wird, so findet man keinen Wert a ($a \in \hat{\mathbb{C}}$) vor einem anderen ausgezeichnet. Wird zum Beispiel ein Wert a relativ selten oder überhaupt nicht angenommen, wie dies etwa bei der Exponentialfunktion für 0 und ∞ zutrifft, so gleicht sich dieser Mangel in einer starken mittleren Konvergenz gegen a aus.

Auf die Frage, wieviele a-Werte eine meromorphe Funktion ausläßt oder wieviele sie nur relativ selten annimmt, gibt der erste Hauptsatz keine Antwort. Sie findet man in dem Satz von Picard - Borel - Nevanlinna und in der Defektrelation. Seinen Ursprung hat der Picard - Borel - Nevanlinnasche Satz in dem wichtigen Satz von K. Weierstraß [52], den dieser im Jahre 1874 (vergl. [10], S. 171) bewies.

S a t z (Weierstraß):
Ist c ($c \in \hat{\mathbb{C}}$) ein isolierter Randpunkt des Rationalitätsbereiches einer in einem Gebiet G meromorphen Funktion w(z) und $U_c' = U_c - c$ eine beliebige punktierte Umgebung von c, die in G liegt, so gilt

$$\hat{w}(U_c') = \hat{\mathbb{C}}.$$

Dieser Satz enthält keine Aussage darüber, ob die Funktion w(z) einen beliebig vorgegebenen Wert (in der Umgebung von c) annimmt. Einen Schritt weiter führt ein Ergebnis von E. Picard [32], der 1879 folgenden Satz bewies.

S a t z (Picard):

Ist die Funktion w(z) in $0 < r_0 < |z| < +\infty$ meromorph und nimmt sie dort drei voneinander verschiedene Werte a_1, a_2, a_3 nicht an, so kann sie bei z_∞ höchstens einen Pol haben.

Der Einbau des Picardschen Satzes in die damalige Funktionentheorie begann mit J. Hadamard 1892 (ganze Funktionen endlicher Ordnung) [14] und E. Borel 1896 (ganze Funktionen beliebiger Ordnung) [4] und endete mit R. Nevanlinna im Jahre 1925 (meromorphe Funktionen beliebiger Ordnung) ([23], [24] und [25]). Nach J. Hadamard konvergiert

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k(a)|^{\varrho+\varepsilon}}$$

(sofern sie nicht leer ist) für jedes a und beliebiges positives ε, wenn die in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion w(z) von endlicher Ordnung ϱ ist, das heißt, wenn

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log T(r,w)}{\log r} = \varrho < +\infty.$$

Dabei bezeichnen $z_k(a)$ die nicht verschwindenden, nach wachsenden Beträgen geordneten a-Stellen von w(z). Der (mit Hilfe der Modulfunktion bewiesene) Picardsche Satz wurde mit elementaren Methoden zuerst von E. Borel im Jahre 1896 bewiesen [4], wobei er noch

wichtige Beziehungen zwischen der Ordnung der meromorphen Funktion und der Dichte der a-Stellen (zunächst für ganze Funktionen beliebiger Ordnung) aufdeckte. Borels Anteil an den beiden folgenden Sätzen besteht in dem Nachweis, daß für jede ganze transzendente Funktion w(z) der Ordnung $\varrho(w)$ (wie auch beim Hadamardschen Satz mit log M(r) anstelle von T(r,w)) die Gleichung

$$\varrho(a) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log n(r,a)}{\log r} = \varrho(w) \qquad (a \in \mathbb{C})$$

mit höchstens einer Ausnahme besteht. (Bekanntlich sind für ganze Funktionen log M(r) und T(r,w) von gleicher Ordnung.)

Die Übertragung dieser Ergebnisse auf meromorphe Funktionen, die neue Begriffsbildungen erforderte, stammt von R. Nevanlinna, der sie in den Rahmen seiner allgemeinen Theorie stellte [26]. Er vertiefte die Borelschen Methoden wesentlich und stellte die Werteverteilungslehre meromorpher Funktionen auf einer allgemeinen Basis dar. Seine Ergebnisse im Zusammenhang mit dem Picard - Borelschen Satz sind neben der Defektrelation die beiden folgenden Sätze.

S a t z (Hadamard - Borel - Nevanlinna):
Für die Ordnung $\varrho(w)$ der in $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion w(z) und die Ordnung $\varrho(a)$ der Anzahlfunktion n(r,a) und den Konvergenzexponenten k(a) der Reihe

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_i(a)|^k}$$

gelten die Ungleichungen

$$\varrho(a) \leqq \varrho(w) \quad , \quad k(a) \leqq \varrho(w).$$

Das Beispiel der Exponentialfunktion, die bekanntlich keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ hat, zeigt, daß $\varrho(a)$ und k(a) kleiner als $\varrho(w)$ sein

können. Um so überraschender wirkt der

S a t z (Picard - Borel - Nevanlinna):

Ist w(z) in der Umgebung von ∞ meromorph und ist ∞ eine wesentliche Singularität für w(z), so gelten für drei voneinander verschiedene Zahlen a_1, a_2, a_3

$$\text{Max } [\varrho(a_1), \varrho(a_2), \varrho(a_3)] = \varrho(w),$$
$$\text{Max } [k(a_1), k(a_2), k(a_3)] = \varrho(w).$$

Für den Fall einer im Einheitskreis (nichtkonstanten) meromorphen Funktion lauten die beiden Sätze entsprechend (vergl. [7], S. 370 ff. und [27], S. 266), jedoch gilt der Satz von Picard - Borel - Nevanlinna nicht mehr, wenn die Charakteristik für r gegen 1 nicht schneller als log $\frac{1}{1-r}$ wächst (vergl. [27], S. 268 f.).

In jüngster Zeit hat A. Dinghas ([8] und [9]) den Picard - Borel Nevanlinnaschen Satz verallgemeinert. Dazu definiert er für in $0 \leqq r < R \leqq +\infty$ definierte reelle Funktionen $\sigma(r)$ einer bestimmten Klasse S die Funktionen

$$T_\sigma(r,w) = \int_{r_0}^{r} S(t,w) \frac{dt}{t\,\sigma(t)}$$

und

$$N_\sigma(r,a) = \int_{r_0}^{r} [n(t,a) - n(r_0,a)] \frac{dt}{t\,\sigma(t)} + n(r_0,a) \int_{1}^{r} \frac{dt}{t\,\sigma(t)}$$

mit einem festen, nicht negativen r_0. Dann kann man mit den beiden Funktionenklassen

$$S(w) = \left\{ \sigma : \sigma \in S, \quad \lim_{r \to R} T_\sigma(r,w) = +\infty \right\}$$

und

$$S_a(w) = \left\{ \sigma : \sigma \in S, \quad \lim_{r \to R} N_\sigma(r,a) = +\infty \right\}$$

die Ergebnisse von J. Hadamard und E. Borel wie folgt formulieren.

S a t z (Dinghas):

Es sei $w(z)$ eine in $0 < r_0 \leqq |z| < R \leqq +\infty$ meromorphe Funktion, deren Charakteristik $T(r,w)$ für $R = +\infty$ der Bedingung

$$\log r = o(T(r,w)),$$

für $R < +\infty$ der Bedingung

$$\log \frac{1}{R-r} = o(T(r,w))$$

genügt. Dann gilt für jedes (endliche oder unendliche) a

$$S_a(w) \leqq S(w).$$

Sind ferner a_1, a_2, a_3 drei beliebige, voneinander verschiedene komplexe Zahlen (wobei auch $a = \infty$ zugelassen wird), so ist stets

$$\bigcup_{k=1}^{3} S_{a_k}(w) = S(w).$$

Daß dieser Satz die Aussage des Picard - Borel - Nevanlinnaschen Satzes enthält, sieht man durch spezielle Wahl der Funktionenklasse S.

Das Verhalten einer (eindeutigen) analytischen Funktion in der Umgebung einer einzigen singulären Stelle ist ein Spezialfall eines bei weitem komplizierteren Werteverteilungsproblems, nämlich der Werteverteilung in der Nähe einer Randmenge von der Kapazität Null. Dieses Problem haben G. af Hällström (nach einer Idee von H. Selberg) 1939 in seiner Dissertation [15] und M. Tsuji ([46] und [47]) 1942 aufgegriffen. Die Ausschöpfung des Existenzgebietes von $w(z)$ gelingt in diesem Fall mit Hilfe der Evans - Selbergschen Kapazitätsfunktion ([12] und [43]). Unter einer Voraussetzung über das Anwachsen der Zusammenhangszahlen der das Existenzgebiet ausschöpfenden Teilgebiete gilt auch hier die Nevanlinnasche Defektrelation

und der Satz von Picard - Borel - Nevanlinna in der von A. Dinghas [9] für den klassischen Fall bewiesenen Form. Zugleich kann man diese Sätze auch für den Fall beweisen, daß die Randmenge von positiver Kapazität ist, wenn es in dem Existenzgebiet eine Greensche Funktion (vergl. [13], S. 32 und [7], S. 206 und S. 266) gibt.

Auch diese Fälle ordnen sich einem allgemeineren Problem unter, nämlich der Werteverteilung einer analytischen Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Vor allem die Arbeiten von L. Sario haben die Werteverteilungstheorie auf Riemannschen Flächen stark beeinflußt. Die ersten Veröffentlichungen zu diesem Fragenkomplex erschienen um 1950. In ihnen wurden zunächst auf Riemannschen Flächen definierte meromorphe Funktionen untersucht. Hier sind neben anderen M. Heins [16], L. Myrberg [19, 20], L. Sario [34, 35], J. Tamura [45] und M. Tsuji [49] zu nennen. Die Ahlforssche Theorie der Überlagerungsflächen [2] haben K. Noshiro und L. Sario [28, 29, 37] auf meromorphe Funktionen, die auf einer Riemannschen Fläche definiert sind, bzw. auf analytische Abbildungen zwischen beliebigen Riemannschen Flächen angewandt.

Die Werteverteilung von analytischen Abbildungen zwischen beliebigen Riemannschen Flächen untersuchte wohl zuerst L. Sario 1962 [36], nachdem S. Chern [5] zwei Jahre vorher mit differentialgeometrischen Mitteln zunächst den Fall einer (nichtausgearteten) Abbildung einer geschlossene Riemannschen Fläche, aus der endlich viele Punkte entfernt sind, in eine geschlossene Riemannsche Fläche untersucht hatte. Das kürzlich erschienene Buch von L. Sario und K. Noshiro [42] gibt einen umfassenden Einblick, wie sich die Nevanlinnasche Werteverteilungstheorie auf beliebige

Riemannsche Flächen vermöge einer von L. Sario [36] gegebenen Nachbarschaftsfunktion übertragen läßt, und wie man mit Hilfe der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen auch für Riemannsche Flächen die unintegrierte Form der zweiten Werteverteilungsungleichung erhalten kann.

Für spezielle Fälle, wenn nämlich die Definitionsfläche der analytischen Abbildung eine Riemannsche Fläche mit Kapazitätsfunktion darstellt, deren Niveaulinien kompakt sind, kann man nach einer Idee von A. Dinghas [6] aus der unintegrierten die integrierte Form der zweiten Werteverteilungsungleichung erhalten (vergl. [29]), die bekanntlich außerhalb gewisser Ausnahmeintervalle gilt. L. Sario hat gezeigt [29,40], daß man durch abermalige zweifache Integration eine überall (d.h. ohne Ausnahmeintervalle) gültige Ungleichung erhält, und in dieser Form gilt sie dann auch im Fall beliebiger Riemannscher Flächen.

Um die Verallgemeinerung des Picard - Borel - Nevanlinnaschen Satzes durch A. Dinghas [9] auf Riemannsche Flächen zu übertragen, hat man nach einem Parameter zu fragen, mit dem sich eine Ausschöpfung der Fläche definieren läßt. Solch ein Parameter aber existiert nicht für jede Riemannsche Fläche, so daß man sich auf gewisse Flächen zu beschränken hat, und diese sind gerade die R_p-Flächen (vergl. [42], S. 30 ff.). Auf ihnen existiert eine Kapazitätsfunktion mit kompakten Niveaulinien. Die von diesen Kurven berandeten Teilflächen schöpfen die Gesamtfläche aus. Zu der Klasse der R_p-Flächen gehören alle kompakten berandeten und alle parabolischen Flächen, als Spezialfälle also der Einheitskreis und die komplexe Ebene.

Zweites Kapitel

Hilfsfunktionen auf Riemannschen Flächen

1. Potentialfunktionen auf R_p-Flächen

Sei R eine offene Riemannsche Fläche mit idealem Rand $\partial R = \Gamma$, auf der eine Kapazitätsfunktion mit kompakten Niveaulinien existiert (vergl. [3], [22] und [33]). Eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Existenz besteht im Fall positiver Kapazität des Randes (hyperbolischer Fall) darin, daß dieser mit seinem transfiniten Kern übereinstimmt (vergl. [18] und [21]). Die eindeutig bestimmte Kapazitätsfunktion ist dann bis auf eine endliche additive Konstante gleich der negativ genommenen Greenschen Funktion von R. Im Fall verschwindender Randkapazität (parabolischer Fall) ist sie eine nicht eindeutig bestimmte Evans - Selbergsche Kapazitätsfunktion (vergl. [22]). Geschlossene Flächen kann man in den parabolischen Fall einbeziehen (vergl. [48] und [50]).

Der allgemeine Punkt einer Riemannschen Fläche wird hier wie üblich mit dem gleichen Symbol bezeichnet, wie die lokale Variable. Sei z ein beliebiger und z_o ein fester Punkt von R, so wird im folgenden für die negativ genommene Greensche Funktion bzw. für die Evans - Selbergsche Kapazitätsfunktion mit dem Pol in z_o $g(z,z_o)$ oder auch kurz $g(z)$ geschrieben. Die reellwertige Funktion $g(z,z_o)$ hat die Eigenschaften:

1. $g(z,z_o)$ ist harmonisch in $R - z_o$.
2. $g(z,z_o) - \log|z - z_o|$ ist harmonisch in einem Parameterkreis K_{z_o} um z_o.

3. Es gilt, wenn $C(\Gamma)$ die Kapazität von Γ bedeutet,

$$\lim_{z\to\Gamma} g(z,z_0) = \begin{cases} 0\ , & 0 < C(\Gamma) \\ +\infty, & 0 = C(\Gamma) \end{cases}.$$

Die Punktmenge

$$\Gamma_\lambda = \left\{ z:\ z \in R,\ g(z) = \lambda \right\}$$

stellt eine Niveaukurve von $g(z)$ auf R dar (vergl. [30], S. 708). Dabei ist im Fall positiver Randkapazität

$$-\infty \leqq \lambda \leqq 0 \tag{2.1}$$

und im Fall verschwindender Randkapazität

$$-\infty \leqq \lambda \leqq +\infty. \tag{2.2}$$

Für hinreichend kleine Werte von λ stellt Γ_λ eine einfach geschlossene Kurve innerhalb eines Parameterkreises um den Pol z_0 dar.

Das zu dem Differential

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

einer auf R definierten reellen Funktion u mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung konjugierte Differential

$$d^*u = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

ist im allgemeinen kein Differential einer Funktion. Ist aber u harmonisch und existiert eine (eventuell nur lokal definierte) konjugiert harmonische Funktion u^*, so gilt (vergl. [3], S. 129 ff. und [44], S. 172 ff.)

$$d^*u = du^*.$$

Das zu dem in dem von Γ_{λ_0} und Γ_λ $(-\infty < \lambda_0 < \lambda)$ berandeten Teilgebiet von R harmonischen Differential dg konjugiert harmonische Differential $d^*g = dg^*$ erfüllt die Bedingung

$$\int_{\Gamma_\lambda} dg^* = \int_{\Gamma_{\lambda_0}} dg^* = 2\pi,$$

denn die nicht eindeutig bestimmte Funktion g^* hat in dem Parameterkreis K_{z_o} die Entwicklung

$$g^*(z,z_o) = \arg\,(z - z_o) + h(z),$$

wobei $h(z)$ eine in K_{z_o} harmonische Funktion bezeichnet.

Bedeutet $n_\Gamma(\lambda)$ die Anzahl der in ihrer Vielfachheit gezählten Nullstellen von grad $g(z)$ in

$$\Delta_\lambda = \left\{ z:\ z \in R,\ -\infty \leqq \lambda_o < g(z) < \lambda \right\}$$

und $e(\lambda)$ die Eulersche Charakteristik von Δ_λ, so gilt (vergl. [17], S. 145 ff. und S. 258)

$$(2.3) \qquad n_\Gamma(\lambda) = \begin{cases} e(\lambda) & , -\infty < \lambda_o \\ e(\lambda) + 1, & -\infty = \lambda_o \end{cases}.$$

2. Nachbarschaftsfunktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen

Seien w_o und w_1 zwei Punkte einer (offenen oder geschlossenen) Riemannschen Fläche W, dann existiert (vergl. [42], S. 42 ff., [48] und [50], S. 456 ff.) eine in $W - w_o - w_1$ harmonische Funktion $t_o(w)$ (ausführlich: $t_o(w;w_o,w_1)$) mit den Eigenschaften:

1. $t_o(w) + 2\log|w - w_o|$ ist harmonisch in einem Parameterkreis K_{w_o} um w_o.
2. $t_o(w) - 2\log|w - w_1|$ ist harmonisch in einem Parameterkreis K_{w_1} um w_1.
3. Ist W eine offene oder eine kompakte berandete Fläche mit (idealem) Rand ∂W, so gilt

$$\int_{\partial W} dt_o^* = 0.$$

Außerdem ist $t_o(w)$ im Fall einer kompakten berandeten Fläche auf dem Rand ∂W konstant.

Die willkürliche additive Konstante wird durch

$$\lim_{w \to w_o} [t_o(w) + 2 \log|w - w_o|] = 0$$

festgelegt und die beiden Parameterkreise K_{w_o} und K_{w_1} werden im weiteren als punktfremd vorausgesetzt. Mit $t_o(w)$ hat auch die auf W nicht negative Funktion

$$s_o(w) = \log (1 + e^{t_o(w)})$$

einen positiven logarithmischen Pol in w_o.

Für einen weiteren von w_o verschiedenen Punkt a von W bildet man die in W - w_o - a harmonische Funktion $t(w,a) = t(w;a,w_o)$, nur mit der veränderten Normierungsvorschrift

$$\lim_{w \to w_o} [t(w,a) - 2 \log|w - w_o|] = s_o(a).$$

Dann ist die Funktion $s_o(w) + t(w,a)$ nach unten beschränkt, hat einen positiven logarithmischen Pol in w = a und ist symmetrisch in w und a. Durch Addition einer endlichen Konstanten $\hat{c}$ kann man erreichen, daß

$$s(w,a) = s_o(w) + t(w,a) + \hat{c} \tag{2.4}$$

nicht negativ wird. Dies ist die von L. Sario [38] eingeführte Nachbarschaftsfunktion. Sie ist ein Maß für die Nähe zweier Punkte auf W und stimmt, wenn W ein Gebiet der vollen komplexen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$ ist, mit $-\log [w,a]^2$ überein.

Mit Hilfe von $t_o(w)$ wird auf W eine konforme Metrik mit dem Flächenelement

$$d\omega = \Delta s \, dW = \frac{e^{t_o} |\text{grad } t_o|^2}{(1 + e^{t_o})^2} \, dW \tag{2.5}$$

eingeführt, wo dW das Euklidische Flächenelement in dem Parameter-

kreis bezeichnet. Die Gesamtfläche von W ist in jedem Fall (vergl. [41])

$$\int_W d\omega = 4\pi$$

und die (außerhalb der Nullstellen von Δs erklärte) Gaußsche Krümmung konstant 1 (vergl. [39]):

$$K = -\frac{\Delta \log \sqrt{\Delta s}}{\Delta s} = 1. \tag{2.6}$$

Die Anzahl der in ihrer Vielfachheit gezählten Nullstellen von grad $t_o(w)$ ist im Fall einer geschlossenen Fläche endlich und gleich der Eulerschen Charakteristik e_W von W vermehrt um 2 (vergl. [17], S. 145 ff. und S. 258). Ist W eine offene Fläche, kann diese Anzahl unendlich groß sein.

Drittes Kapitel

Die beiden Werteverteilungsungleichungen

1. Vorbereitende Tatsachen und Begriffsbildungen

Sei $w(z)$ eine analytische Abbildung von R in W, oder allgemeiner eine Abbildung von R in W, die in einer gewissen Umgebung von ∂R analytisch ist, d.h., es gibt ein λ_0 $(-\infty \leqq \lambda_0)$, so daß $w(z)$ in der Teilfläche

$$\hat{\Delta}_{+\infty} = \left\{ z:\ z \in R,\ \lambda_0 \leqq g(z) \right\}$$

analytisch ist. Mit $n(\lambda,a)$ bezeichnet man die Anzahl der in ihrer Vielfachheit gezählten a-Stellen von $w(z)$ in

$$\hat{\Delta}_\lambda = \left\{ z:\ z \in R,\ \lambda_0 \leqq g(z) \leqq \lambda \right\}.$$

Entfernt man aus $\hat{\Delta}_\lambda$ die (endlich vielen) a-Stellen $(a \neq w_0$, $a \neq w_1)$ von $w(z)$ mit hinreichend kleinen punktfremden Parameterkreisen, so gilt in dem übrigbleibenden Δ'_λ nach dem Stokesschen Satz (vergl. [44], S. 160), wenn $\partial\Delta'_\lambda$ den Rand von Δ'_λ bezeichnet,

$$\int_{\Delta'_\lambda} \Delta s(w(z),a)\, dR = \int_{\partial\Delta'_\lambda} d^* s(w(z),a).$$

Zunächst nimmt man ohne Einschränkung an, daß auf Γ_λ keine a-Stellen liegen. Läßt man die Parameterkreise zusammenschrumpfen, so ergibt sich

$$\int_{\Delta_\lambda} \Delta s(w(z),a)\, dR = \int_{\Gamma_\lambda - \Gamma_{\lambda_0}} d^* s(w(z),a) + 4\pi\, n(\lambda,a) - 2\pi\, n(\lambda_0,a).$$

Die beiden Integrale lassen sich wie folgt deuten.

$$S(\lambda,w) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_\lambda} d\omega(w(z))$$

ist der durch 4π dividierte Flächeninhalt der mehrblättrigen Riemannschen Bildfläche von Δ_λ über W.

$$m(\lambda,a) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_\lambda} s(w(z),a)\, dg^*$$

ist ein Maß für die mittlere Annäherung der Bildkurve von Γ_λ unter w(z) an a und wird Schmiegungsfunktion genannt. Durch diese Begriffe erhält die letzte Gleichung die Gestalt

(3.1) $$S(\lambda,w) + k = m'(\lambda,a) + n(\lambda,a)$$

mit

$$k = k(a) = m'(\lambda_0,a) + \frac{1}{2}\, n(\lambda_0,a),$$

außer für solche Werte λ, für die $a \in w(\Gamma_\lambda)$ gilt. Im folgenden ist lediglich von Bedeutung, daß $m(\lambda,a)$ eine stetige Funktion von λ ist. Für $\lambda_0 = -\infty$ ist k durch Null zu ersetzen. Unter $m'(\lambda,a)$ ist in (3.1) die Ableitung von $m(\lambda,a)$ nach λ zu verstehen.

Es bedeute S die Gesamtheit der auf (2.1) bzw. (2.2) definierten, eindeutigen, reellen, stetigen Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedes $\sigma \in S$ ist positiv, nicht abnehmend und besitzt eventuell mit Ausnahme von isolierten Punkten, in denen $\sigma(\lambda)$ endliche (linke und rechte) Derivierte haben soll, eine stetige Ableitung.

2. Es sei

$$\tau = \tau(\lambda) = \begin{cases} \lambda & , \ 0 = C(\Gamma) \\ \log \frac{1}{|\lambda|}, & 0 < C(\Gamma) \end{cases}.$$

Dann gilt für jedes $\sigma \in S$

(3.2) $$\overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \frac{\dot{\sigma}(\lambda)}{\sigma^2(\lambda)} < +\infty,$$

wo $\dot{\sigma}(\lambda)$ die Ableitung von $\sigma(\lambda)$ nach τ bedeutet und in den Unste-

tigkeitspunkten von $\sigma'(\lambda) = \frac{d\sigma}{d\lambda}$ das Maximum der vorderen und hinteren Derivierten zu verstehen ist.

Aus dieser Funktionenfamilie werden im folgenden nur die Funktionen einer Teilklasse betrachtet, die folgendermaßen definiert ist. Man bilde für jedes $\sigma \in S$ die charakteristische Funktion

$$T_\sigma(\lambda,w) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} S(g,w)\,\frac{dg}{\sigma(g)}$$

von $w(z)$. Dann ist $S(w)$ die Teilklasse von S mit der Eigenschaft

$$\lim_{\tau \to +\infty} T_\sigma(\lambda,w) = +\infty. \tag{3.3}$$

Schließt man im Fall positiver Randkapazität beschränktartige Abbildungen, also solche mit beschränkter Charakteristik $T(\lambda,w) = T_1(\lambda,w)$ ($\sigma = 1$), aus, so gehört jede endliche (positive) Konstante zur Klasse $S(w)$. Diese Tatsache wird zu speziellen Ergebnissen, den auf Riemannsche Flächen übertragenen klassischen Nevanlinnaschen Hauptsätzen und Defekten, führen.

Analog zu $T_\sigma(\lambda,w)$ definiert man die Funktionen

$$\tau_\sigma(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\,\tau(g)}{\sigma(g)}\,, \quad \xi_\sigma(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{dg}{\sigma(g)}\,, \quad \eta_\sigma(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{dg}{|g|\sigma(g)}\,.$$

Dabei ist $\lambda_0 < \lambda_1$ und es gilt

$$\tau_\sigma(\lambda) = \begin{cases} \xi_\sigma(\lambda), & 0 = C(\Gamma) \\ \eta_\sigma(\lambda), & 0 < C(\Gamma) \end{cases}.$$

Wählt man für σ die Konstante 1, so erhält man die Charakteristik $T_1(\lambda,w)$, die mit $T(\lambda,w)$ bezeichnet wird. Ebenso wird mit allen analog gebildeten Funktionen verfahren.

2. Charakterisierung der Abbildungen mit Weierstraß-Eigenschaft

Von einer Abbildung w von R in W sagt man im Hinblick auf den Weierstraßschen Satz, sie habe die Weierstaß-Eigenschaft, wenn für jede beliebige Umgebung U des idealen Randes ∂R von R ($U \subset R$) gilt (R parabolische offene Riemannsche Fläche)

$$\hat{w}(U) = W.$$

S a t z :

Ist R eine parabolische Fläche und w eine Abbildung, die die Weierstraß-Eigenschaft nicht hat, so gilt

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{T(\lambda,w)}{\lambda} < +\infty.$$

B e w e i s :

Da w die Weierstraß-Eigenschaft nicht hat, gibt es ein $a \in W$ und einen Parameterkreis K_a in W, so daß

$$K_a \subset W - \hat{w}(U)$$

für mindestens eine Umgebung U von ∂R. Die Beschränktheit von $s(w,a)$ für $w \in \hat{w}(U)$ folgt aus der Stetigkeit dieser Funktion für $w \neq a$. Damit ist $m(\lambda,a)$ für hinreichend großes λ beschränkt. Da sich außerdem $n(\lambda,a)$ für genügend große Werte von λ nicht ändert, folgt die Behauptung durch Integration der Gleichung (3.1).

Der soeben bewiesene Satz läßt sich ohne Benutzung der Weierstraß-Eigenschaft durch direkte Abschätzung von $S(\lambda,w)$ für analytische Abbildungen herleiten, wenn R eine geschlossene Fläche ist. Daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, nämlich daß

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{T(\lambda,w)}{\lambda} = +\infty,$$

wenn w die Weierstraß-Eigenschaft besitzt, soll im Anschluß an die erste Werteverteilungsungleichung bewiesen werden.

Schließt man im parabolischen Fall die Abbildungen aus, die die Weierstraß-Eigenschaft nicht haben, so kann man

$$\lambda = o(T(\lambda,w))$$

voraussetzen. Es gilt dann für $\sigma \in S(w)$

$$\xi_\sigma(\lambda) = o(T_\sigma(\lambda,w)). \tag{3.4}$$

Allgemeiner findet man den

H i l f s s a t z 1 :

Sei $f(\lambda)$ eine in $\lambda_1 \leqq \lambda$, $\tau(\lambda) < +\infty$ definierte und dort integrierbare Funktion und sei

$$f_\sigma(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\sigma(\lambda)} + \int_{\lambda_1}^{\lambda} f(g)\,\frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\,dg + O(1),$$

dann gelten die Ungleichungen

$$\underline{\lim}_{\tau\to+\infty}\frac{f(\lambda)}{T(\lambda,w)} \leqq \underline{\lim}_{\tau\to+\infty}\frac{f_\sigma(\lambda)}{T_\sigma(\lambda,w)} \leqq \overline{\lim}_{\tau\to+\infty}\frac{f_\sigma(\lambda)}{T_\sigma(\lambda,w)} \leqq \overline{\lim}_{\tau\to+\infty}\frac{f(\lambda)}{T(\lambda,w)}\,.$$

B e w e i s :

Es genügt, die letzte der Ungleichungen nachzuweisen; die erste läßt sich analog zeigen. Für $T_\sigma(\lambda,w)$ gilt die Darstellung

$$T_\sigma(\lambda,w) = \frac{T(\lambda,w)}{\sigma(\lambda)} + \int_{\lambda_0}^{\lambda} T(g,w)\,\frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\,dg\,.$$

Nun sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\overline{\lim}_{\tau\to+\infty}\frac{f(\lambda)}{T(\lambda,w)} = \varrho < +\infty,$$

so existiert zu jedem beliebigen positiven ε ein λ_ε $(\lambda_1 \leqq \lambda_\varepsilon)$ derart, daß für alle λ $(\lambda_\varepsilon \leqq \lambda)$

$$\frac{f(\lambda)}{T(\lambda,w)} \leqq \varrho + \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich für $f_\sigma(\lambda)$ die Abschätzung

$$f_\sigma(\lambda) \leqq (\varrho + \varepsilon)\,T_\sigma(\lambda,w) + O(1),$$

sobald λ größer als λ_ε ist. Beachtet man noch die Bedingung (3.3), so folgt die Behauptung.

3. Die erste Werteverteilungsungleichung

Man schreibe Gleichung (3.1) in der Form

$$(3.5)\quad \frac{d}{d\lambda}\frac{m(\lambda,a)}{\sigma(\lambda)} + \frac{m(\lambda,a)}{\sigma^2(\lambda)}\frac{d\sigma}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda}N_\sigma(\lambda,a) = \frac{d}{d\lambda}T_\sigma(\lambda,w) + \frac{k}{\sigma(\lambda)},$$

wobei für $\sigma \in S(w)$ die Anzahlfunktion $N_\sigma(\lambda,a)$ ein Integral der Funktion $\frac{n(\lambda,a)}{\sigma(\lambda)}$ ist. Die zu diesem Integral gehörige Integrationskonstante kann auf verschiedene Art festgelegt werden. Hier sei

$$N_\sigma(\lambda,a) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{n(g,a)}{\sigma(g)}\,dg.$$

Für $\lambda_0 = -\infty$ und $w(z_0) = a$ ist diese Definition in bekannter Weise abzuändern, indem man mit einem endlichen λ_1 $(\lambda_0 < \lambda_1)$

$$N_\sigma(\lambda,a) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{n(g,a) - n(-\infty,a)}{\sigma(g)}\,dg + n(-\infty,a)\,\xi_\sigma(\lambda)$$

setzt. Schreibt man noch

$$m_\sigma(\lambda,a) = \frac{m(\lambda,a)}{\sigma(\lambda)} + \int_{\lambda_1}^{\lambda} m(g,a)\frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\,dg,$$

so ergibt sich durch Integration der Gleichung (3.5)

$$(3.6)\quad m_\sigma(\lambda,a) + N_\sigma(\lambda,a) = T_\sigma(\lambda,w) + k\,\xi_\sigma(\lambda) + c.$$

Die Konstante

$$c = c(a) = \frac{m(\lambda_1,a)}{\sigma(\lambda_1)} + N_\sigma(\lambda_1,a) - T_\sigma(\lambda_1,w)$$

hängt im wesentlichen nur von a ab. Nach (3.4) ist im Fall verschwindender Randkapazität

$$\xi_\sigma(\lambda) = o(T_\sigma(\lambda,w)).$$

Im Fall positiver Randkapazität ist

$$\xi_{\sigma}(\lambda) = O(1).$$

Damit lautet für jedes $a \in W$ die

1. Wertevertеilungsungleichung:

$$m_{\sigma}(\lambda,a) + N_{\sigma}(\lambda,a) = T_{\sigma}(\lambda,w)\,(1 + o(1)). \tag{3.7}$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.6) gelingt die Umkehrung des Satzes von 3.2 wie folgt.

Satz:

Ist R eine Riemannsche Fläche mit verschwindender Randkapazität und w eine analytische Abbildung von R mit der Weierstaß-Eigenschaft, so gilt

$$\varliminf_{\lambda \to +\infty} \frac{T(\lambda,w)}{\lambda} = +\infty.$$

Beweis:

Sei z_1 ein beliebiger Punkt aus $\Delta_{+\infty}$ und U_1 eine Umgebung von z_1 in $\Delta_{+\infty}$. $U_1^* = w(U_1)$ sei das Bild von U_1 in der Fläche W. Sei

$$\Delta_{+\infty}^{(1)} = \left\{ z:\ z \in R,\ \lambda_o^{(1)} < g(z) < +\infty \right\}$$

mit $\lambda_o < \lambda_o^{(1)}$ so, daß der Durchschnitt von $\Delta_{+\infty}^{(1)}$ und U_1 leer ist. Da die Werte, die w(z) in $\Delta_{+\infty}^{(1)}$ annimmt, in W dicht liegen, existiert ein Punkt z_2 in $\Delta_{+\infty}^{(1)}$ $(z_2 \notin U_1)$, für den $w(z_2)$ in U_1^* liegt. Zu z_2 wähle man eine Umgebung U_2 so klein, daß die abgeschlossene Hülle ihres Bildes $U_2^* = w(U_2)$ innerhalb U_1^* liegt. Fährt man induktiv so fort, erhält man eine Punktfolge (z_n) $(n = 1,2,\ldots)$. Die Bilder der zugehörigen Umgebungen erfüllen die Bedingungen

$$\hat{U}_{n+1}^* \subset U_n^*.$$

Wählt man jene so klein, daß (U_n^*) gegen einen Punkt a von W konvergiert, so hat w unendlich viele a-Stellen in $\Delta_{+\infty}$, denn da a in jedem U_n^* liegt, gibt es in der Umgebung U_n eines jeden z_n mindestens einen Punkt $z_n(a)$ mit

$$w(z_n(a)) = a \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Da diese Punkte alle verschieden sind, gilt für dieses a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} n(\lambda,a) = +\infty.$$

Für $\sigma = 1$ erhält man aus (3.6)

$$m(\lambda,a) + N(\lambda,a) = T(\lambda,w) + k\lambda + c_1$$

mit einer endlichen Konstanten c_1. Da die Abschätzung

$$\tfrac{\lambda}{2}\, n(\tfrac{\lambda}{2},a) \leqq \int_{\frac{\lambda}{2}}^{\lambda} n(g,a)\, dg \leqq N(\lambda,a) \quad (0 \leqq \lambda)$$

für $2\lambda_0 \leqq \lambda$ gilt, folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Damit ist die Charakterisierung der rationalen Funktionen durch R. Nevanlinna (vergl. [25], S. 35) auf folgenden Satz erweitert worden.

S a t z :

Notwendig und hinreichend dafür, daß eine analytische Abbildung einer parabolischen Fläche die Weierstraß-Eigenschaft besitzt, ist die Bedingung

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{T(\lambda,w)}{\lambda} = +\infty.$$

Zusatz : Gilt mit $\lambda_0 = -\infty$

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \frac{T(\lambda,w)}{\lambda} < 1,$$

so ist w eine Konstante. Dies folgt, da dann für jedes a aus W gilt

$$\lim_{\lambda \to +\infty} n(\lambda,a) < 1.$$

Im folgenden soll w im parabolischen Fall stets die Weierstraß-Eigenschaft besitzen.

Aus (3.6) soll eine weitere für das Folgende wichtige Ungleichung abgeleitet werden. Dazu denkt man sich analog zu den Überlegungen von L. Ahlfors im Fall der Riemannschen Kugel [1] über die Fläche W

eine Massenbelegung vom Gesamtbetrag 1 verbreitet, so daß die überall positive Dichte ϱ im allgemeinen stetig ist, aber auch unendlich werden darf. Man setzt für q voneinander verschiedene Punkte $a_1, \ldots,$ a_q, unter denen die in 2.2 gewählten Punkte w_o und w_1 ohne Einschränkungen nicht vorkommen mögen,

$$\varrho(a) = C_q \prod_{k=1}^{q} e^{s(a,a_k)} \, (1 + s(a,a_k))^{-2}$$

mit einer noch zu bestimmenden endlichen Konstanten C_q. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_W \varrho(a) \, d\omega(a).$$

Um dies einzusehen, ist es notwendig, die Existenz über einen (hinreichend klein gewählten) Parameterkreis K_k um ein a_k zu zeigen. Dort gilt

$$e^{s(a,a_k)} \, (1 + s(a,a_k))^{-2} = O((r \log r)^{-2}),$$

so daß

$$\int_{K_k} \varrho(a) \, d\omega(a) = O(1).$$

Also läßt sich die Konstante C_q so festlegen, daß

$$\int_W \varrho(a) \, d\omega(a) = 1.$$

Man setzt nun

$$S_\varrho(\lambda,w) = \int_W n(\lambda,a) \, \varrho(a) \, d\omega(a) .$$

Bekanntlich bezeichnet $S_\varrho(\lambda,w)$ die Gesamtmasse der Bildfläche von $\Delta\lambda$ über W und es gilt

$$S_\rho(\lambda,w) = \int_{\Delta_\lambda} \Delta s_o(w(z))\ \rho(w(z))\ dR$$

oder auch

$$S_\rho(\lambda,w) = \int_{\lambda_o}^{\lambda}\int_0^{2\pi} \Delta s(w(z),a)\left(\frac{1}{|\operatorname{grad} g(z)|}\right)^2 \rho(w(z))\ dg^*\ dg.$$

Multipliziert man (3.6) mit $\rho(a)\ d\omega(a)$, so folgt mit Rücksicht darauf, daß $m_\sigma(\lambda,a)$ nicht negativ wird, durch Integration über W

$$\int_W N_\sigma(\lambda,a)\ \rho(a)\ d\omega(a) \leq T_\sigma(\lambda,w) + K\ \xi_\sigma(\lambda) + C. \tag{3.8}$$

mit

$$K = \int_W k(a)\ \rho(a)\ d\omega(a)$$

und

$$C = \int_W c(a)\ \rho(a)\ d\omega(a).$$

K ist hier durch Null zu ersetzen, falls $\lambda_o = -\infty$. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß w auf $\Gamma_{\lambda_o} \cup \Gamma_{\lambda_1}$ keinen der Punkte a_k $(k = 1,\ldots,q)$, w_o und w_1 annimmt und damit beweisen, daß K und C endliche Konstanten sind. Dazu genügt es, die Beschränktheit von

$$\int_{w(\Gamma_{\lambda_o})} d^*s(w,a) \qquad (a \in W)$$

und

$$\int_W s(w,a)\ \rho(a)\ d\omega(a) \qquad (w \in w(\Gamma_{\lambda_1}))$$

nachzuprüfen. Zunächst ist das erste Integral endlich, denn es ist

$$\int_{w(\Gamma_{\lambda_o})} d^*s_o(w)$$

endlich, da $w_o \notin w(\Gamma_{\lambda_o})$, und

$$\frac{1}{4\pi}\int_{w(\Gamma_{\lambda_o})} d^*t(w,a)$$

ist durch den Windungsindex von $w(\Gamma_{\lambda_o})$ um w_o nach oben beschränkt. Überdeckt man die kompakte Menge $w(\Gamma_{\lambda_1})$ durch endlich viele Parameterkreise K_i $(i = 1,\ldots,n)$, so daß der Durchschnitt von K_{w_o} mit jedem K_i leer ist und alle a_k außerhalb der K_i liegen, und wählt zu jedem K_i einen kleineren konzentrischen Kreis K_i' derart, daß die Vereinigung dieser K_i' noch $w(\Gamma_{\lambda_1})$ überdeckt, so wird Γ_{λ_1} dadurch in folgender Weise in n Teilbögen $\Gamma^i_{\lambda_1}$ zerlegt. Γ_{λ_1} ist die Vereinigung dieser $\Gamma^i_{\lambda_1}$ und $w(\Gamma^i_{\lambda_1})$ liegt in K_i'. Man beachte nun:

1. $s(w,a) = s(a,w) = s_o(a) + t(a,w) + \hat{c}$.
2. $t(a,w) - 2\log\left|\frac{1 - a\bar{w}}{a - w}\right|$ ist für $w \in w(\Gamma^i_{\lambda_1})$ in K_i eine harmonische Funktion von a.
3. $t(a,w) - 2\log|a - w_o|$ ist in K_{w_o} eine harmonische Funktion von a

Damit ist $t(a,w)$ für $w \in w(\Gamma^i_{\lambda_1})$ in $W - K_i - K_{w_o}$ und $\varphi(a)$ in $K_i \cup K_{w_o}$ und damit

$$\int_W t(a,w)\,\varphi(a)\,d\omega(a)$$

für $w \in w(\Gamma_{\lambda_1})$ beschränkt. Entsprechend ist

$$\int_W s_o(a)\,\varphi(a)\,d\omega(a)$$

endlich, wenn man die Singularitäten von $t_o(a)$ in K_{w_o} und K_{w_1} beachtet. Damit sind K und C endliche Konstanten.

Definiert man nun

$$T^{\sigma}_{\varphi}(\lambda,w) = \int_{\lambda_o}^{\lambda} S_{\varphi}(g,w)\,\frac{dg}{\sigma(g)},$$

so erhält man wegen

$$T_{\varphi}^{\sigma}(\lambda,w) = \int_{W} N_{\sigma}(\lambda,a)\ \varphi(a)\ d\omega(a)$$

aus (3.8)

$$T_{\varphi}^{\sigma}(\lambda,w) \leqq T_{\sigma}(\lambda,w) + K\ \xi_{\sigma}(\lambda) + C.$$

Für den parabolischen Fall ist damit, wenn $-\infty < \lambda_0$,

(3.9) $$T_{\varphi}^{\sigma}(\lambda,w) \leqq T_{\sigma}(\lambda,w)\ (1 + o(1))$$

und wenn $-\infty = \lambda_0$ bzw. für den hyperbolischen Fall

(3.10) $$T_{\varphi}^{\sigma}(\lambda,w) \leqq T_{\sigma}(\lambda,w) + O(1).$$

Ist σ eine beliebige positive Konstante, so wird mit

$$T_{\varphi}(\lambda,w) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} S_{\varphi}(g,w)\ dg$$

$$T_{\varphi}(\lambda,w) \leqq T(\lambda,w) + O(\lambda)$$

beziehungsweise

$$T_{\varphi}(\lambda,w) \leqq T(\lambda,w) + O(1).$$

4. Die zweite Werteverteilungsungleichung

Mit $n_0(\lambda)$ wird die Anzahl der in ihrer Vielfachheit gezählten Nullstellen von $\operatorname{grad}_w t_0(w(z))$, mit $n_1(\lambda)$ die von $w'(z)$ in Δ_λ bezeichnet. In 2.1 wurde der Zusammenhang der Anzahl der Nullstellen von grad $g(z)$ in Δ_λ mit der Eulerschen Charakteristik $e(\lambda)$ von Δ_λ dargelegt. Wie die Anzahlfunktion $N_{\sigma}(\lambda,a)$ durch $n(\lambda,a)$ werden $N_{\sigma}^{0}(\lambda)$, $N_{\sigma}^{1}(\lambda)$ bzw. $E_{\sigma}(\lambda)$ durch $n_0(\lambda)$, $n_1(\lambda)$ bzw. $n_{\Gamma}(\lambda)$ gebildet. Mit Rücksicht auf (2.6) ist (zunächst für endliches λ_0)

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_\lambda - \Gamma_{\lambda_0}} d^{*}\log \Delta_w s(w(z),a) = n_0(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\lambda} \Delta s(w(z),a)\ dR =$$

$$= n_0(\lambda) - 2\ S(\lambda,w).$$

Da $\log|w'(z)|$ bzw. $\log|\operatorname{grad} g(z)|$ in Δ_λ außerhalb der Nullstellen von $w'(z)$ bzw. grad $g(z)$ harmonisch ist, gelten die Gleichungen

$$n_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\lambda - \Gamma_{\lambda_o}} d^* \log|w'(z)| \quad \text{und} \quad n_\Gamma(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\lambda - \Gamma_{\lambda_o}} d^* \log|\operatorname{grad} g(z)| .$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachtet man die Funktion

$$Q(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \log \left[\frac{\Delta s(w(z),a)\ \varrho(w(z))}{|\operatorname{grad} g(z)|^2} \prod_{k=1}^{q} (1 + s(w(z),a_k))^2 \right] dg^*,$$

die sich darstellen läßt als

$$Q(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \log \Delta_w s(w(z),a)\ dg^* + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \log|w'(z)|\ dg^* -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \log|\operatorname{grad} g(z)|\ dg^* + \sum_{k=1}^{q} m(\lambda,a_k) + \frac{1}{2} \log C_q .$$

Beachtet man die Gleichung (3.1) und die Voraussetzung, daß auf Γ_{λ_o} keine a_k-Stellen ($k = 1,\dots,q$) liegen, so wird

$$Q'(\lambda) - Q'(\lambda_o) = (q-2)\ S(\lambda,w) - \sum_{k=1}^{q} n(\lambda,a_k) + n_o(\lambda) + n_1(\lambda) - n_\Gamma(\lambda).$$

Um aus dieser Gleichung die zweite Werteverteilungsungleichung abzuleiten, dividiert man sie durch $\sigma(\lambda)$ ($\sigma \in S(w)$) und integriert von λ_1 bis λ. Dann ist

$$(3.11) \quad (q-2)\ T_\sigma(\lambda,w) - \sum_{k=1}^{q} N_\sigma(\lambda,a_k) + N^o_\sigma(\lambda) + N^1_\sigma(\lambda) - E_\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda} Q'(g)\ \frac{dg}{\sigma(g)} - Q'(\lambda_o)\ \xi_\sigma(\lambda) + O(1).$$

Im Fall $\lambda_o = -\infty$ sind die über Γ_{λ_o} erstreckten Integrale in den letzten Gleichungen durch Null zu ersetzen. Besonders hervorgehoben sei, daß damit in der Gleichung (3.11) der Faktor bei $\xi_\sigma(\lambda)$ Null wird. Aus der Abschätzung von

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} Q'(g)\ \frac{dg}{\sigma(g)}$$

ergibt sich die zweite Werteverteilungsungleichung.

H i l f s s a t z 2 :

Es sei $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ positiv und integrierbar, $g(x)$ dort monoton wachsend, stetig und stückweise stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{1}{A}\int_0^1 g'(x)\,\log f(x)\,dx \leqq \log\left[\frac{1}{A}\int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx\right]$$

mit

$$0 < A = \int_0^1 g'(x)\,dx = g(1) - g(0).$$

B e w e i s (vergl. [7], S. 363) :

Aus der Bernoullischen Ungleichung

$$1 + n\alpha \leqq (1+\alpha)^n \qquad (-1 \leqq \alpha < +\infty)$$

folgt mit $\alpha = \frac{1}{n}(x-1)$

$$x \leqq \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \qquad (0 \leqq x).$$

Wegen

$$x \leqq \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n = e^{x-1}$$

ist dann

$$\log x \leqq x - 1 \qquad (0 \leqq x).$$

Danach ist

$$\log\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{A}\int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx}\right] \leqq \frac{f(x)}{\frac{1}{A}\int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx} - 1$$

und nach Multiplikation mit $g'(x)$ $(0 \leqq g'(x))$ und anschließender Integration

$$\int_0^1 \log\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{A}\int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx}\right] g'(x)\,dx \leqq 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Zusatz: Mit Hilfe der Transformation $x = \frac{t - a}{b - a}$ erhält man die Ungleichung

$$\frac{1}{A}\int_a^b g'(x) \log f(x)\, dx \leqq \log \left[\frac{1}{A}\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \right]$$

mit entsprechend geändertem A für Funktionen f(x) und g(x), die den obigen Bedingungen im Intervall [a,b] (a < b) genügen.

H i l f s s a t z 3 :

Die Funktion y(x) sei im Intervall $J = [x_0, +\infty)$ $(0 < x_0)$ positiv, stetig und monoton wachsend. Ferner sei sie mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten, die sich im Endlichen nicht häufen, stetig differenzierbar. Ist dann für ein beliebiges aber festes, positives ε

$$J_\varepsilon = \left\{ x:\ x \in J,\ y^{1+\varepsilon}(x) < y'(x) \right\},$$

so ist

$$\int_{J_\varepsilon} dx < +\infty.$$

B e w e i s (vergl. [7], S. 362) :

Es sei J_x der Durchschnitt von J_ε mit dem Intervall $[x_0, x]$, dann gilt

$$\int_{J_x} dt \leqq \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y^{1+\varepsilon}(t)}\, dt < \frac{1}{\varepsilon\, y^{\varepsilon}(x_0)}.$$

Hat y(x) mit eventueller Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, die sich im Endlichen nicht häufen, eine zweite, stetige, positive Ableitung y''(x), so kann man durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes 3 zeigen, daß auf einer Intervallmenge I mit

$$\int_I dx = +\infty$$

die Doppelungleichung

$$y''(x) \leqq y'(x)^{1+\varepsilon} \leqq y(x)^{(1+\varepsilon)^2}$$

gilt.

Um schließlich

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} Q'(g)\,\frac{dg}{\sigma(g)}$$

abzuschätzen, beachtet man, daß sich dieses Integral als Summe der folgenden beiden Integrale darstellen läßt:

$$I_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g}\Big[\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_g} \log\frac{\Delta s(w(z),a)\,\rho(w(z))}{|\operatorname{grad} g(z)|^2}\,dg^*\Big]\frac{dg}{\sigma(g)},$$

$$I_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_g} \log\prod_{k=1}^{q}(1+s(w(z),a_k))\,dg^*\Big]\frac{dg}{\sigma(g)}.$$

Zunächst soll I_1 abgeschätzt werden. Nach partieller Integration wendet man den zweiten Hilfssatz auf

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_\lambda} \log\Big[\frac{\Delta s(w(z),a)\,\rho(w(z))}{|\operatorname{grad} g(z)|^2}\Big]\,dg^*$$

an und erhält

$$2\,I_1 \leqq \frac{1}{\sigma(\lambda)}\log\frac{S'_\rho(\lambda,w)}{2\pi} + \int_{\lambda_1}^{\lambda}\log\frac{S'_\rho(g,w)}{2\pi}\,\frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\,dg + O(1).$$

Im folgenden wird eine Ableitung nach der Veränderlichen λ stets durch einen Strich, eine Ableitung nach der Veränderlichen τ ($\tau = \tau(\lambda)$) stets durch einen Punkt bezeichnet. Dann ist

$$S'_\rho(\lambda,w) = \tau''(\lambda)\,\sigma(\lambda)\,\dot{T}^{\sigma}_{\rho}(\lambda,w) + \tau'(\lambda)^2\,[\dot{\sigma}(\lambda)\,\dot{T}^{\sigma}_{\rho}(\lambda,w) + \sigma(\lambda)\,\ddot{T}^{\sigma}_{\rho}(\lambda,w)].$$

Jetzt beachtet man die drei Tatsachen:

1. Die Funktion $\tau(\lambda)$ erfüllt in beiden Fällen die Bedingung
$$\tau''(\lambda) \leqq \tau'(\lambda)^2.$$
2. Wegen der Monotonie von $\sigma(\lambda)$ ist für $\lambda_1 \leqq \lambda$
$$\frac{1}{\sigma(\lambda)} \leqq \frac{1}{\sigma(\lambda_1)} = c_1.$$
3. Aus der Bedingung (3.2) folgt die Existenz einer endlichen

Konstanten M, so daß für $\lambda_M \leqq \lambda$ ($\lambda_1 \leqq \lambda_M$) gilt

$$\frac{\dot{\sigma}(\lambda)}{\sigma^2(\lambda)} \leqq M < +\infty.$$

Damit ist mit $c_1 + M = c_2$ für $\lambda_M \leqq \lambda$

$$S'_\varrho(\lambda,w) \leqq \tau'(\lambda)^2\sigma^2(\lambda)\,[c_2\,\dot{T}^{\sigma}_\varrho(\lambda,w) + c_1\,\ddot{T}^{\sigma}_\varrho(\lambda,w)] = \tau'(\lambda)^2\sigma^2(\lambda)\;\dot{t}_\varrho(\lambda,w)$$

mit

$$t_\varrho(\lambda,w) = c_2\,T^{\sigma}_\varrho(\lambda,w) + c_1\,\dot{T}^{\sigma}_\varrho(\lambda,w).$$

Es ergibt sich wieder durch partielle Integration

$$2\,I_1 \leqq \int_{\lambda_M}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log\,[\tau'(g)^2\,\sigma^2(g)\;\dot{t}_\varrho(g,w)]\;\frac{dg}{\sigma(g)} + O(1).$$

Wegen

$$\log \tau'(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 = C(\Gamma) \\ \tau, & 0 < C(\Gamma) \end{cases},$$

ist

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log \tau'(g)\;\frac{dg}{\sigma(g)} = \begin{cases} 0 & , 0 = C(\Gamma) \\ \eta_\sigma(\lambda), & 0 < C(\Gamma) \end{cases}.$$

Außerdem ist

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log \sigma(g)\;\frac{dg}{\sigma(g)} < \frac{1}{\sigma(\lambda_1)}.$$

Als letztes wird

$$\int_{\lambda_M}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log\,\dot{t}_\varrho(g,w)\;\frac{dg}{\sigma(g)} = \frac{\log\,\dot{t}_\varrho(\lambda,w)}{\sigma(\lambda)} + \int_{\lambda_M}^{\lambda} \log\,\dot{t}_\varrho(g,w)\;\frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\,dg + O(1).$$

Mit Hilfssatz 2 läßt sich das letzte Integral abschätzen durch

$$\frac{1}{\sigma(\lambda_1)} \log\,\Big[\int_{\lambda_M}^{\lambda} \dot{t}_\varrho(g,w)\;\frac{\dot{\sigma}(g)}{\sigma^2(g)}\,d\tau(g)\;\Big] + O(1)$$

und unter Beachtung von (3.2) durch

$$\frac{1}{\sigma(\lambda_1)} \log\,t_\varrho(\lambda,w) + O(1).$$

Da $S'_\varrho(\lambda,w)$ positiv ist, trifft dies auch für $\dot{t}_\varrho(\lambda,w)$ zu. Man kann also den dritten Hilfssatz sowohl auf die Funktion $t_\varrho(\lambda,w)$ als auch von vornherein auf $T^{\sigma}_\varrho(\lambda,w)$ anwenden und findet dadurch

$$\int_{\lambda_M}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log \dot{t}_\varrho(g,w)\, \frac{dg}{\sigma(g)} \leqq \frac{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{\sigma(\lambda_1)} \log\left[(c_1+c_2)\, T^{\sigma}_\varrho(\lambda,w)\right] + O(1)$$

außerhalb einer Intervallmenge J, für die

$$\int_J d\tau(g) < +\infty.$$

Beachtet man noch (3.9) bzw. (3.10), so gilt außerhalb einer Intervallmenge mit obiger Bedingung

$$I_1 \leqq \eta_\sigma(\lambda) + O(\log T_\sigma(\lambda,w)).$$

Dabei ist im Fall verschwindender Randkapazität $\eta_\sigma(\lambda)$ durch Null zu ersetzen.

Nach partieller Integration und zweimaliger Anwendung des zweiten Hilfssatzes folgt

$$I_2 \leqq \frac{1}{\sigma(\lambda)} \sum_{k=1}^{q} \log m(\lambda,a_k) + \frac{1}{\sigma(\lambda_1)} \sum_{k=1}^{q} \log\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda} m(g,a_k)\, \frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\, dg\right] + O(1).$$

Nach Definition von $m_\sigma(\lambda,a)$ ist

$$\frac{m(\lambda,a)}{\sigma(\lambda)} \leqq m_\sigma(\lambda,a)$$

und

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} m(g,a)\, \frac{\sigma'(g)}{\sigma^2(g)}\, dg \leqq m_\sigma(\lambda,a).$$

Dadurch wird

$$I_2 \leqq \frac{2}{\sigma(\lambda_1)} \sum_{k=1}^{q} \log m_\sigma(\lambda,a_k) + O(1).$$

Unter Beachtung von (3.7) findet man so

$$I_2 \leqq O(\log T_\sigma(\lambda,w)).$$

Zusammenfassend ist damit gezeigt

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} Q'(g)\,\frac{dg}{\sigma(g)} \leqq \eta_\sigma(\lambda) + O(\log T_\sigma(\lambda,w))$$

außerhalb gewisser, oben näher definierter Intervalle. Hiermit und mit der Gleichung (3.11) ist die zweite Werteverteilungsungleichung bewiesen und läßt sich so formulieren:

2. W e r t e v e r t e i l u n g s u n g l e i c h u n g :
Ist w(z) eine (in der Nähe des (idealen) Randes) nichtkonstante analytische Abbildung einer (offenen) R_p-Fläche R in eine (offene oder geschlossene) Riemannsche Fläche W und sind $a_1,\ldots,a_q$ q voneinander verschiedene Punkte von W, so gilt für $\sigma \in S(w)$

$$(3.12)\quad (q-2)\,T_\sigma(\lambda,w) \leqq \sum_{k=1}^{q} N_\sigma(\lambda,a_k) - N^0_\sigma(\lambda) - N^1_\sigma(\lambda) + E_\sigma(\lambda) + O(\tau_\sigma(\lambda)) + O(\log T_\sigma(\lambda,w))$$

außerhalb einer Intervallmenge J, für die

$$\int_J d\tau(\lambda)$$

endlich ist, sofern w(z) außerdem die Weierstraß-Eigenschaft in ∂R besitzt, wenn R eine parabolische Fläche ist. Dabei ist, wenn im parabolischen Fall $\lambda_0 = -\infty$, $O(\tau_\sigma(\lambda))$ durch Null und im hyperbolischen Fall stets durch $\eta_\sigma(\lambda)$ zu ersetzen.

5. Spezialfälle

1. Ist W eine geschlossene Riemannsche Fläche mit der Eulerschen Charakteristik e_W, so gibt $e_W + 2$ die Anzahl der Nullstellen von $\operatorname{grad}_w t_o(w)$ auf W an. Fügt man diese $e_W + 2$ Nullstellen zu den q Punkten $a_1,\ldots,a_q$ hinzu, setzt, ohne wesentliche Einschränkungen zu machen, voraus, daß diese $q + e_W + 2$ Punkte voneinander ver-

schieden sind, und beachtet

$$\sum_{k=q+1}^{q+e_W+2} N_{\mathfrak{G}}(\lambda, a_k) \leqq N^{o}_{\mathfrak{G}}(\lambda),$$

so findet man die Ungleichung (3.12) in der Form

$$(q+e_W)\, T_{\mathfrak{G}}(\lambda,w) \leqq \sum_{k=1}^{q} N_{\mathfrak{G}}(\lambda,a_k) - N^{1}_{\mathfrak{G}}(\lambda) + E_{\mathfrak{G}}(\lambda) + O(\tau_{\mathfrak{G}}(\lambda)) + O(\log T_{\mathfrak{G}}(\lambda,w)).$$

Ist $w(z)$ eine meromorphe Funktion auf einer Riemannschen R_p - Fläche R, d.h. $W = \hat{\mathbb{C}}$, $e_W = -2$, so wählt man $w_o = \infty$ und $w_1 = 0$ und findet $t_o(w) = 2 \log|w|$ und $s(a,b) = -2 \log [a,b]$. Das Glied $N^{o}_{\mathfrak{G}}(\lambda)$ verschwindet, da $n_o(\lambda)$ null ist.

2. Ist R die offene komplexe Ebene $\mathbb{C}$ bzw. ein endlicher Kreis um 0 in ihr, der dann ohne Einschränkung der Einheitskreis sein soll, so erhält man unter Beachtung von

$$\lambda = \log r \quad (0 \leqq r_o \leqq r < \rho,\ \rho = +\infty \text{ bzw. } \rho = 1)$$

$$e(\lambda) = \begin{cases} 0, & 0 < r_o \\ -1, & 0 = r_o \end{cases}.$$

Setzt man mit $r_o < r_1$

$$\xi^{*}_{\mathfrak{G}}(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{dt}{t\, \mathfrak{G}(t)}\ ,\ \eta^{*}_{\mathfrak{G}}(r) = \int_{o}^{r} \frac{dt}{(1-t)\, \mathfrak{G}(t)}$$

und beachtet für $0 \leqq r \leqq 1$ die linke Seite der Doppelungleichung

$$r(1-r) \leqq r|\log r| \leqq 1-r\ ,$$

so ergibt sich

$$\xi_{\mathfrak{G}}(\lambda) = \xi^{*}_{\mathfrak{G}}(r) \text{ und } \eta_{\mathfrak{G}}(\lambda) \leqq \xi^{*}_{\mathfrak{G}}(r) + \eta^{*}_{\mathfrak{G}}(r)\,.$$

Weiterhin folgt aus der Doppelungleichung, daß auf einer Intervallfolge J von $0 < r_1 < r < 1$ die beiden Integrale

$$\int_J \frac{dr}{1-r} \text{ und } \int_J \frac{dr}{r\,|\log r|}$$

gleichzeitig konvergieren bzw. divergieren. Damit gilt die zweite Werteverteilungsungleichung im hyperbolischen Fall ($\varrho = 1$) außerhalb einer Intervallmenge J, für die

$$\int_J d \log \frac{1}{1-r} = \int_J \frac{dr}{1-r}$$

endlich ist. Im parabolischen Fall ($\varrho = +\infty$) ist für die Intervallmenge J

$$\int_J d \log r$$

endlich. Für den Fall einer in $r_0 \leq |z| < \varrho$ meromorphen Funktion ergibt sich damit die zweite Werteverteilungsungleichung in der von A. Dinghas [9] gegebenen Form.

S a t z (Dinghas):

Ist w(z) eine in $r_0 \leq |z| < \varrho$ ($\varrho = +\infty$ bzw. $\varrho = 1$) nichtkonstante meromorphe Funktion, so gilt unter sonst gleichen Bedingungen wie oben

$$(q-2)\ T_\sigma(r,w) \leq \sum_{k=1}^{q} N_\sigma(r,a_k) - N_\sigma^1(r) + O(\tau_\sigma(r)) + O(\log T_\sigma(r,w))$$

außerhalb einer Intervallmenge J von $1 < r$ bzw. $r < 1$, für die

$$\int_J d\tau(r)$$

endlich ist. Dabei ist

$$\tau(r) = \begin{cases} \log r\,, & \varrho = +\infty \\ \log \frac{1}{1-r}, & \varrho = 1 \end{cases}$$

und

$$\tau_\sigma(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{d\tau(t)}{\sigma(t)} = \begin{cases} \xi_\sigma^*(r), & 0 \leq r_0 < r_1 \leq r < +\infty \\ \eta_\sigma^*(r), & 0 = r_1 \leq r < 1 \end{cases}.$$

Falls im Fall $\varrho = +\infty$ gilt $r_0 = 0$, so ist $O(\tau_\sigma(r))$ durch $-\xi_\sigma^*(r)$ zu

ersetzen und im Fall $\varrho = 1$ stets durch $\eta^*_\sigma(r)$.

3. Wählt man für $\sigma(\lambda)$ eine beliebige positive Konstante, so kürzt sich diese Größe aus der zweiten Werteverteilungsungleichung heraus und man bekommt für den hier betrachteten Fall einer R_p-Fläche die Formulierung von K. Noshiro und L. Sario [29].

S a t z (Noshiro - Sario):

Ist $w(z)$ eine analytische Abbildung einer R_p-Fläche R in eine beliebige offene oder geschlossene Riemannsche Fläche W, so gilt

$$(q-2)\,T(\lambda,w) \leqq \sum_{k=1}^{q} N(\lambda,a_k) - N_o(\lambda) - N_1(\lambda) + E(\lambda) + O(\tau(\lambda)) + O(\log T(\lambda,w))$$

außerhalb einer Intervallmenge J, für die

$$\int_J d\tau(\lambda)$$

endlich ist. Dabei ist im parabolischen Fall $O(\tau(\lambda))$ durch Null zu ersetzen, wenn $\lambda_o = -\infty$, und im hyperbolischen Fall stets durch $\log \frac{1}{|\lambda|}$.

Ebenso erhält man die Formulierung von G. af Hällström [15] und die ursprüngliche von R. Nevanlinna [26].

Daß die zweite Werteverteilungsungleichung scharf ist, hat für den hyperbolischen Fall R. Nevanlinna ([27], S. 276) bemerkt. Für eine Klasse automorpher Funktionen, für die

$$T(r,w) = O(\log \frac{1}{1-r}),$$

gilt

$$(q-2)\,T(r,w) \sim \sum_{k=1}^{q} N(r,a_k) - N_1(r) + \log \frac{1}{1-r}\,.$$

Für den parabolischen Fall hat A. Dinghas ([9], S. 251) bemerkt, daß mit $a_q = \infty$ für jedes Polynom die asymptotische Gleichung gilt:

$$(q-2)\,T(r,w) \sim \sum_{k=1}^{q} N(r,a_k) - N_1(r) - \log r.$$

Viertes Kapitel

Folgerungen aus der zweiten Werteverteilungsungleichung

1. Die Affinitätsrelation

Bezeichnet $n_1(\lambda,a)$ die Anzahl der a-Stellen von $w(z)$ in Δ_λ mit der um 1 verminderten Vielfachheit gezählt, so daß

$$\sum_{k=1}^{q} n_1(\lambda,a_k) \leqq n_1(\lambda),$$

so kann $N_\sigma^1(\lambda)$ durch die Summe der $N_\sigma^1(\lambda,a_k)$ ersetzt werden, wobei $N_\sigma^1(\lambda,a)$ durch $n_1(\lambda,a)$ definiert ist wie $N_\sigma(\lambda,a)$ durch $n(\lambda,a)$. Bekanntlich gibt $n_1(\lambda)$ die Summe der Ordnungen der (endlich vielen) Verzweigungspunkte in Δ_λ an. Entsprechendes gilt für $n_1(\lambda,a)$ in bezug auf die a-Stellen von $w(z)$ in Δ_λ, das heißt, $n_1(\lambda,a)$ zählt die Ordnungen der Verzweigungspunkte in Δ_λ über a. Zählt $n_0(\lambda,a)$ die über a gelegenen Nullstellen von $\operatorname{grad}_w t_0(w(z))$ in Δ_λ in ihrer Vielfachheit, so gilt

$$\sum_{k=1}^{q} n_0(\lambda,a_k) \leqq n_0(\lambda).$$

Für jeden Punkt a von W heißt

$$\delta_\sigma(a) = 1 - \overline{\lim_{\tau\to+\infty}} \frac{N_\sigma(\lambda,a)}{T_\sigma(\lambda,w)}$$

der Defekt von a bezüglich σ ($\sigma \in S(w)$). Ist σ eine beliebige positive Konstante, so schreibt man auch nur $\delta(a)$ entsprechend zu $T(\lambda,w)$ und $N(\lambda,a)$. Aus der ersten Werteverteilungsungleichung folgt

$$0 \leqq \delta_\sigma(a) \leqq 1.$$

Entsprechend heißt

$$\vartheta_\sigma(a) = \underline{\lim_{\tau\to+\infty}} \frac{N_\sigma^1(\lambda,a)}{T_\sigma(\lambda,w)}$$

der Verzweigungsindex von a bezüglich σ und

$$\vartheta_\sigma = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\sigma^1(\lambda)}{T_\sigma(\lambda,w)}$$

die totale Verzweigung bezüglich σ. Wegen

$$N_\sigma^1(\lambda,a) \leqq N_\sigma(\lambda,a)$$

ist auch

$$0 \leqq \vartheta_\sigma(a) \leqq 1.$$

Für die Nullstellen von $\operatorname{grad}_w t_0(w(z))$ setzt man

$$\gamma_\sigma(a) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\sigma^0(\lambda,a)}{T_\sigma(\lambda,w)}$$

und

$$\gamma_\sigma = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\sigma^0(\lambda)}{T_\sigma(\lambda,w)}.$$

Schließlich definiert man den Eulerschen Index bezüglich σ durch

$$\varepsilon_\sigma = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{E_\sigma(\lambda)}{T_\sigma(\lambda,w)}.$$

Auch diese letzten drei Zahlen sind nicht negativ. Nach dem Hilfssatz 1 gelten die Ungleichungen

$$\delta(a) \leqq \delta_\sigma(a),\ \vartheta(a) \leqq \vartheta_\sigma(a),\ \vartheta \leqq \vartheta_\sigma,\ \gamma(a) \leqq \gamma_\sigma(a),\ \gamma \leqq \gamma_\sigma,\ \varepsilon_\sigma \leqq \varepsilon.$$

Aus der zweiten Werteverteilungsungleichung kann man ohne weiteres folgendes Ergebnis ablesen:

A f f i n i t ä t s r e l a t i o n :

$$\sum_{k=1}^{q} [\delta(a_k) + \vartheta(a_k) + \gamma(a_k)] \leqq \sum_{k=1}^{q} [\delta_\sigma(a_k) + \vartheta_\sigma(a_k) + \gamma_\sigma(a_k)] \leqq$$

$$\leqq 2 + \varepsilon_\sigma + d_\sigma \leqq 2 + \varepsilon + d.$$

Dabei sind d_σ und d höchstens im hyperbolischen Fall von Null verschieden und es gilt

$$0 \leqq d_\sigma = \varlimsup_{\lambda\to 0} \frac{\eta_\sigma(\lambda)}{T_\sigma(\lambda,w)} \leqq d = \varlimsup_{\lambda\to 0} \frac{\log \frac{1}{|\lambda|}}{T(\lambda,w)}.$$

Für endliches $\varepsilon + d$ erhält man hierdurch Abschätzungen für jede der

drei Summen und es gibt dann höchstens abzählbar viele Punkte von W mit positivem Defekt bzw. Verzweigungsindex bzw. γ-Index. Außerdem gilt die schärfere Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{q} \delta_\sigma(a_k) + \vartheta_\sigma + \gamma_\sigma \leqq 2 + \varepsilon_\sigma + d_\sigma .$$

Haben die Punkte der Ausnahmeintervalle in der zweiten Wertevertei-lungsungleichung ein endliches Supremum, so kann man den Eulerschen Index wie L. Sario (vergl. [42], S. 23 und S. 63) durch

$$\varepsilon_\sigma^* = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{E_\sigma(\lambda)}{T_\sigma(\lambda, w)}$$

und entsprechend statt d_σ

$$d_\sigma^* = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\eta_\sigma(\lambda)}{T_\sigma(\lambda, w)}$$

definieren. Dann ist mit ε_σ^* statt ε_σ und d_σ^* statt d_σ die Affinitätsrelation bis auf die letzte Ungleichung gültig, denn nach Hilfssatz 1 gelten

$$\varepsilon^* \leqq \varepsilon_\sigma^* \quad , \quad d^* \leqq d_\sigma^* .$$

Den klassischen Satz von Picard erhält man im Sonderfall 2 aus 3.5 mit $\sigma = 1$ und $\varrho = +\infty$ aus der in der Affinitätsrelation enthaltenen Defektrelation

$$\sum_{k=1}^{q} \delta(a_k) \leqq 2 .$$

2. Der Picard - Borel - Nevanlinnasche Satz

Bei festem a aus W soll $S_a(w)$ die Teilklasse von $S(w)$ bedeuten, die durch folgende Bedingung charakterisiert wird:

Für jedes $\sigma \in S_a(w)$ ist

$$\lim_{\tau \to +\infty} N_\sigma(\lambda, a) = +\infty .$$

Man sieht aus der ersten Werteverteilungsungleichung sofort, daß

$$S_a(w) \subseteq S(w).$$

Mit Hilfe dieser beiden Klassen läßt sich der Picard - Borel - Nevanlinnasche Satz wie folgt aussprechen (vergl. [9], S.228):

S a t z (Picard - Borel - Nevanlinna - Dinghas):

Die Charakteristik der analytischen Abbildung einer R_p-Fläche in eine beliebige Riemannsche Fläche genüge den Bedingungen

$$\tau(\lambda) = o(T(\lambda,w))$$

und

$$E(\lambda) = o(T(\lambda,w)).$$

Sind dann a_1,a_2,a_3 drei beliebige, voneinander verschiedene Punkte von W, so ist stets

$$\bigcup_{k=1}^{3} S_{a_k}(w) = S(w).$$

B e w e i s :

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus der Defektrelation, nach der

$$1 \leq \sum_{k=1}^{3} \overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \frac{N_\sigma(\lambda,a_k)}{T_\sigma(\lambda,w)},$$

so daß für mindestens ein k (k = 1,2,3) gilt

$$\lim_{\tau \to +\infty} N_\sigma(\lambda,a_k) = +\infty.$$

Fünftes Kapitel

Spezielle Defektbildungen

1. Die zweite Werteverteilungsungleichung

Wählt man in den bisherigen Entwicklungen für $\sigma(\lambda)$ die Funktion $T^{1-\alpha}(\lambda,w)$ mit $0 \leqq \alpha \leqq 1$ und setzt

$$T_\alpha(\lambda,w) = \begin{cases} \log T(\lambda,w), & 0 = \alpha \\ \frac{1}{\alpha}\ T^\alpha(\lambda,w), & 0 < \alpha \leqq 1 \end{cases}$$

und

$$N_\alpha(\lambda,a) = N_{T^{1-\alpha}}(\lambda,a),$$

so ist der Defekt von a bezüglich $T^{1-\alpha}(\lambda,w)$ gegeben als

$$\delta_\alpha(a) = 1 - \overline{\lim_{\tau\to+\infty}} \frac{N_\alpha(\lambda,a)}{T_\alpha(\lambda,w)}.$$

Entsprechend werden die übrigen Größen gebildet. Da $T^{1-\alpha}(\lambda,w)$ nicht notwendig zur Klasse S gehört, müssen die Ungleichungen hier erneut nachgeprüft werden.

Zunächst gilt die erste Werteverteilungsungleichung. Dazu ist nur zu überlegen, daß im parabolischen Fall

$$\xi_\alpha(\lambda) = o(T_\alpha(\lambda,w)).$$

Dies sieht man durch Anwendung des Hilfssatzes 1 aus 3.2. Dagegen folgt die Gültigkeit der zweiten Werteverteilungsungleichung nicht ohne weiters, da die Ungleichung (3.2) hier nicht erfüllt zu sein braucht. Es ist deshalb notwendig, die Abschätzung von

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} Q'(g)\,\frac{dg}{\sigma(g)}$$

erneut durchzuführen.

Zur Abschätzung von I_1 beachtet man, daß

$$S'_\varrho(\lambda,w) \leqq \tau'(\lambda)^2\, T^{1-\alpha}(\lambda,w)\, \left[\left(1+(1-\alpha)\,\frac{\dot T(\lambda,w)}{T(\lambda,w)}\right)\dot T_\varrho^{(\alpha)}(\lambda,w) + \ddot T_\varrho^{(\alpha)}(\lambda,w)\right]$$

Da $T(\lambda,w)$ eine monoton wachsende Funktion ist, für die

$$\lim_{\tau\to+\infty} T(\lambda,w) = +\infty,$$

gilt für $0 \leqq \alpha < 1$ von einem λ_α $(\lambda_1 \leqq \lambda_\alpha)$ ab

$$1 \leqq \log T^{1-\alpha}(\lambda,w).$$

Deshalb ist

$$S'_\varrho(\lambda,w) \leqq \tau'(\lambda)^2\, T^{1-\alpha}(\lambda,w)\, \dot u_\varrho(\lambda,w)$$

mit

$$u_\varrho(\lambda,w) = T_\varrho^{(\alpha)}(\lambda,w) + \log T^{1-\alpha}(\lambda,w)\, \dot T_\varrho^{(\alpha)}(\lambda,w)$$

und damit

$$2\, I_1 \leqq \int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log\left[\tau'(g)^2\, T^{2(1-\alpha)}(g,w)\, \dot u_\varrho(g,w)\right] \frac{dg}{T^{1-\alpha}(g,w)} + O(1).$$

Wie in 3.4 ist

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log \tau'(g)\, \frac{dg}{T^{1-\alpha}(g,w)} = \begin{cases} 0 & ,\ 0 = C(\Gamma) \\ \eta_\alpha(\lambda), & 0 < C(\Gamma) \end{cases}$$

und

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log T^{1-\alpha}(g,w)\, \frac{dg}{T^{1-\alpha}(g,w)} \leqq \frac{1}{T^{1-\alpha}(\lambda_1,w)}.$$

Die Abschätzung des verbleibenden Integrals gelingt mit folgendem

H i l f s s a t z 4 :

Die Funktion $f(x)$ sei in $J = (0,+\infty)$ stetig, positiv und strebe monoton gegen $+\infty$. Ferner sei $g(x)$ in J stetig, nicht negativ und

$$\int_0^{+\infty} g(x)\, dx < +\infty.$$

Dann ist

$$I(x) = \int_0^x f(t)\, g(t)\, dt = o(f(x)).$$

B e w e i s (vergl. [9], S. 247) :

Zu vorgegebenem positivem ε wähle man x_0 so, daß

$$\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx < \varepsilon$$

ausfällt. Dann ist für x $(x_0 \leqq x)$

$$0 \leqq I(x) \leqq \int_0^{x_0} f(t)\,g(t)\,dt + \varepsilon f(x),$$

also auch

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{I(x)}{f(x)} \leqq \varepsilon .$$

Das beweist die Behauptung.

Zunächst ist durch partielle Integration

$$\int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial g} \log \dot{u}_\varrho(g,w)\, \frac{dg}{T^{1-\alpha}(g,w)} = \int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \log \dot{u}_\varrho(g,w)\, \frac{(1-\alpha)\,\dot{T}(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\,d\tau(g) + \frac{\log \dot{u}_\varrho(\lambda,w)}{T^{1-\alpha}(\lambda,w)} + O(1).$$

Nach Hilfssatz 2 folgt

$$\int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \log\left[\frac{\dot{u}_\varrho(g,w)}{u_\varrho(g,w)\,\dot{T}(g,w)}\right] \frac{(1-\alpha)\,\dot{T}(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\,d\tau(g) \leqq \leqq \frac{1}{T^{1-\alpha}(\lambda_1,w)} \log \int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \frac{\dot{u}_\varrho(g,w)}{u_\varrho(g,w)} \frac{d\tau(g)}{T^{2-\alpha}(g,w)} + O(1)$$

und wegen des positiven Integranden ist

$$\int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \frac{\dot{u}_\varrho(g,w)}{u_\varrho(g,w)} \frac{d\tau(g)}{T^{2-\alpha}(g,w)} \leqq \frac{\log u_\varrho(\lambda,w)}{T^{2-\alpha}(\lambda_1,w)} + O(1).$$

Nach Hilfssatz 4 ist

$$\int_{\lambda_\alpha}^{\lambda} \log u_\varrho(g,w)\, \frac{(1-\alpha)\,\dot{T}(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\,d\tau(g) = o(\log u_\varrho(\lambda,w))$$

und ebenso

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \log T'(g,w)\, \frac{(1-\alpha)\,\dot{T}(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\, d\tau(g) = (1-\alpha)\, o(\log T'(\lambda,w)).$$

Außerdem ist im Fall positiver Randkapazität

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \log \tau'(g)\, \frac{(1-\alpha)\,\dot{T}(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\, d\tau(g) = (1-\alpha)\, o\left(\log \frac{1}{|\lambda|}\right),$$

so daß

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \log \dot{T}(g,w)\, \frac{(1-\alpha)\,\dot{T}(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\, d\tau(g) = o(\log \dot{T}(\lambda,w)) + (1-\alpha)\, o\left(\log \frac{1}{|\lambda|}\right),$$

wenn man im Fall verschwindender Randkapazität $o(\log \frac{1}{|\lambda|})$ durch Null ersetzt. Zusammenfassend erhält man

$$I_1 \leqq \eta_\alpha(\lambda) + (1-\alpha)\, o\left(\log \frac{1}{|\lambda|}\right) + \frac{\log \dot{u}_\varrho(\lambda,w)}{T^{1-\alpha}(\lambda,w)} + o(\log u_\varrho(\lambda,w)) + o(\log \dot{T}(\lambda,w)),$$

wenn man beachtet, daß

$$\log \log u_\varrho(\lambda,w) = o(\log u_\varrho(\lambda,w)).$$

Nach Hilfssatz 3 ist außerhalb einer Intervallmenge J, für die

$$\int_J d\tau(\lambda) < +\infty,$$

$$u_\varrho(\lambda,w) \leqq T_\varrho^{(\alpha)}(\lambda,w) + \log T^{1-\alpha}(\lambda,w)\, [T_\varrho^{(\alpha)}(\lambda,w)]^{1+\varepsilon},$$

$$\dot{u}_\varrho(\lambda,w) \leqq u_\varrho^{1+\varepsilon}(\lambda,w)$$

und

$$\dot{T}(\lambda,w) \leqq T^{1+\varepsilon}(\lambda,w).$$

Beachtet man neben den auch hier gültigen Ungleichungen (3.9) und (3.10) noch

$$\log T(\lambda,w) = \begin{cases} T_0(\lambda,w) & , \ 0 = \alpha \\ O(\log T_\alpha(\lambda,w), & 0 < \alpha \leqq 1 \end{cases},$$

so wird (was für $\alpha = 1$ unmittelbar einzusehen ist) für $0 < \alpha \leqq 1$

$$I_1 \leqq \eta_\alpha(\lambda) + (1-\alpha)\, o\left(\log \frac{1}{|\lambda|}\right) + O(\log T_\alpha(\lambda,w))$$

und

$$I_1 \leq \eta_0(\lambda) + o(\log \tfrac{1}{|\lambda|}) + o(T_0(\lambda,w)).$$

Dabei sind die von $\log \frac{1}{|\lambda|}$ abhängigen Glieder im parabolischen Fall durch Null zu ersetzen.

I_2 kann man wie in 3.4 abschätzen. Mit Hilfe von (3.7) gelingt jedoch folgende schärfere Abschätzung:

$$I_2 \leq q \frac{\log T(\lambda,w)}{T^{1-\alpha}(\lambda,w)} + q \int_{\lambda_1}^{\lambda} \log T(g,w) \frac{(1-\alpha)\, T'(g,w)}{T^{2-\alpha}(g,w)}\, dg + O(1).$$

Also ist

$$I_2 \leq \begin{cases} O(1) & , \ 0 \leq \alpha < 1 \\ O(\log T(\lambda,w)), & \alpha = 1 \end{cases}.$$

Damit gilt die zweite Werteverteilungsungleichung in der Form

$$(q-2)\, T_\alpha(\lambda,w) \leq \sum_{k=1}^{q} N_\alpha(\lambda,a_k) - N_\alpha^0(\lambda) - N_\alpha^1(\lambda) + E_\alpha(\lambda) + O(\tau_\alpha(\lambda)) + o(T_\alpha(\lambda,w))$$

außerhalb einer Intervallmenge J_α, für die

$$\int_{J_\alpha} d\tau(\lambda)$$

endlich ist. Dabei ist $O(\tau_\alpha(\lambda))$ durch Null zu ersetzen, wenn im parabolischen Fall $\lambda_0 = -\infty$. Im hyperbolischen Fall hat man für dieses Glied $\eta_\alpha(\lambda) + (1-\alpha)\, o(\log \frac{1}{|\lambda|})$ zu schreiben.

2. Die Affinitätsrelation

Aus der soeben erhaltenen zweiten Werteverteilungsungleichung läßt sich wieder eine Aussage über allgemeinere Defekte gewinnen, wenn man für $0 \leq \alpha < 1$ im hyperbolischen Fall voraussetzt, daß $w(z)$ von nicht verschwindender unterer Ordnung ist, denn dann ist

$$\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \frac{\log \frac{1}{|\lambda|}}{T_\alpha(\lambda,w)} < +\infty.$$

Die Affinitätsrelation lautet

$$\sum_{k=1}^{q} [\delta_\alpha(a_k) + \vartheta_\alpha(a_k) + \gamma_\alpha(a_k)] \leqq 2 + \varepsilon_\alpha + d_\alpha .$$

Dabei ist d_α höchstens im hyperbolischen Fall von Null verschieden. Wie in 4.1 kann hier ε_α durch ε_α^* und d_α durch d_α^* ersetzt werden, wenn die Ausnahmepunkte der zweiten Werteverteilungsungleichung nach oben beschränkt sind, und d_α^* ist für $0 \leqq \alpha < 1$ endlich, da dann die Ordnung von $w(z)$ positiv ist.

Man kann zeigen, daß auch die Defekte bezüglich $\mathfrak{o}(\lambda) = T^{1-\alpha}(\lambda,w)$, die δ_α-Defekte, nicht kleiner als die klassischen Defekte $\delta(a) = \delta_1(a)$ sind. Allgemeiner gelten für $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ die Ungleichungen

$$\delta_\beta(a) \leqq \delta_\alpha(a), \quad \vartheta_\beta(a) \leqq \vartheta_\alpha(a), \quad \gamma_\beta(a) \leqq \gamma_\alpha(a),$$
$$\varepsilon_\alpha \leqq \varepsilon_\beta, \quad d_\alpha \leqq d_\beta, \quad \varepsilon_\beta^* \leqq \varepsilon_\alpha^*, \quad d_\beta^* \leqq d_\alpha^*.$$

Es soll hier nur die erste Ungleichung nachgeprüft werden, die für $\alpha < \beta$ durch

$$\delta_\alpha(a) \leqq 1 - \frac{\alpha}{\beta}[1 - \delta_\beta(a)] \leqq 1$$

ergänzt werden kann, da sich die andern ebenso nachweisen lassen (vergl. Hilfssatz 1), und dazu genügt es, zu beweisen, daß

$$\overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \frac{N_\alpha(\lambda,a)}{T_\alpha(\lambda,w)} \leqq \overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \frac{N_\beta(\lambda,a)}{T_\beta(\lambda,w)} .$$

Sei

$$\overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \frac{N_\beta(\lambda,a)}{T_\beta(\lambda,w)} = \rho \quad (\rho \leqq 1),$$

so existiert zu jedem positiven ε ein λ_ε so, daß

$$\frac{N_\beta(\lambda,a)}{T_\beta(\lambda,w)} \leqq \rho + \varepsilon \quad (\lambda_0 \leqq \lambda_\varepsilon \leqq \lambda).$$

Damit ist mit

$$N_\alpha(\lambda,a) = \int_{\lambda_\varepsilon}^{\lambda} n(g,a) \frac{dg}{T^{1-\alpha}(g,w)} + O(1)$$

nach partieller Integration

$$N_\alpha(\lambda,a) = \frac{N_\beta(\lambda,a)}{T^{\beta-\alpha}(\lambda,w)} + (\beta-\alpha)\int_{\lambda_\varepsilon}^{\lambda} N_\beta(g,a)\,\frac{T'(g,w)}{T^{\beta-\alpha+1}(g,w)}\,dg + O(1)$$

und also

$$N_\alpha(\lambda,a) = \frac{1}{\beta}\,\frac{N_\beta(\lambda,a)}{T_\beta(\lambda,w)}\,T^\alpha(\lambda,w) + \frac{\beta-\alpha}{\beta}\int_{\lambda_\varepsilon}^{\lambda} \frac{N_\beta(g,a)}{T_\beta(g,w)}\,\frac{T'(g,w)}{T^{1-\alpha}(g,w)}\,dg + O(1).$$

Hieraus folgt für positives α die Abschätzung

$$N_\alpha(\lambda,a) \leq (\rho+\varepsilon)\left[\frac{\alpha}{\beta}\,T_\alpha(\lambda,w) + \frac{\beta-\alpha}{\beta}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{T'(g,w)}{T^{1-\alpha}(g,w)}\,dg\right] + O(1)$$

und für $\alpha = 0$ $(0 < \beta)$

$$N_0(\lambda,a) \leq (\rho+\varepsilon)\left[\frac{1}{\beta} + T_0(\lambda,w)\right] + O(1).$$

Beachtet man

$$\lim_{\tau\to+\infty} T_\alpha(\lambda,w) = +\infty,$$

so folgt aus diesen Ungleichungen die Behauptung. Insbesondere gilt

$$\delta(a) \leq \delta_0(a).$$

Die beiden in 4.1 und 5.2 angegebenen Defektsätze gehen auf A. Dinghas [8] zurück. Sie sind insofern eine Erweiterung der Defektrelation von R. Nevanlinna [25], als sie für die nicht kleineren Defekte $\delta_\sigma(a)$ $(\sigma \in S(w))$ und $\delta_\alpha(a)$ $(\alpha \in [0,1])$ dieselbe obere Schranke für die Defektsumme geben, wie sie nach R. Nevanlinna für die Defekte $\delta(a)$ gilt.

Anhang

Abhängigkeit der δ_α-Defekte vom Pol der Kapazitätsfunktion

Bekanntlich gibt es Funktionen, für die die Nevanlinnaschen Defekte im parabolischen Fall vom Ursprung der Ausschöpfungsgebiete abhängig sind. D. Dugué [11] hat dies an Hand der in der komplexen Ebene meromorphen Funktion

$$w(z) = \frac{e^{2\pi i e^{z}} - 1}{e^{2\pi i e^{-z}} - 1}$$

gezeigt und G. Valiron [51] hat eine hinreichende Bedingung für die Unabhängigkeit dieser Defekte von dem Ausgangspunkt angegeben, die in der Forderung

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r+1,w)}{T(r,w)} = 1$$

besteht. Obwohl nun eine entsprechende Beziehung für $T_0(r,w)$ gilt, sobald nur der obige Grenzwert existiert, sind die Defekte $\delta_0(a)$ im allgemeinen ebenfalls vom Pol der Kapazitätsfunktion abhängig. Dies kann man mit Hilfe der Idee von D. Dugué am obigen Beispiel nachprüfen, das auch M. Parreau [31] benutzte, um die Abhängigkeit der Ahlforsschen Defekte vom Ursprungspunkt nachzuweisen.

Mit $n(r,a)$ wird wie bisher die Anzahl der a-Stellen von $w(z)$ in $|z| \leqq r$, mit $\hat{n}(r,a)$ die in $|z - 1| \leqq r$ bezeichnet. Dann gelten die asymptotischen Gleichheiten

$$e^{-1}\, \hat{n}(r,0) \sim n(r,0) = n(r,\infty) \sim e\, \hat{n}(r,\infty).$$

Im weiteren werden alle Bezeichnungen mit einem Dach ($\hat{}$) versehen, die sich auf einen Kreis um $z = 1$ beziehen. Man bestätigt leicht die

Beziehung

$$\hat{N}_\alpha(r,0) \sim e^2 \hat{N}_\alpha(r,\infty)$$

und damit auch

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\hat{N}_\alpha(r,\infty)}{\hat{T}_\alpha(r,w)} \leq \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\hat{N}_\alpha(r,0)}{\hat{T}_\alpha(r,w)}.$$

Gleichheit kann hier nur bestehen, wenn beide Grenzwerte verschwinden. Entweder sind also die vier Defekte $\delta_\alpha(0)$, $\delta_\alpha(\infty)$, $\hat{\delta}_\alpha(0)$ und $\hat{\delta}_\alpha(\infty)$ alle gleich 1 oder mindestens einer der Defekte $\hat{\delta}_\alpha(0)$ und $\hat{\delta}_\alpha(\infty)$ ist von $\delta_\alpha(0) = \delta_\alpha(\infty)$ verschieden. Daß der erste Fall nicht eintreten kann, erkennt man durch Vergleich der Anzahlfunktion und der charakteristischen Funktion von w(z) mit denen von

$$f(z) = e^{2\pi i e^z} - 1,$$

die nur die defekten Werte -1 und ∞ aufweist.

Unter Beachtung der Ungleichungen

$$T(r,w) \leq 2\, T(r,f) + O(1)$$

und

$$\frac{1}{2^{1-\alpha}} \leq \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{N_\alpha(r,0;w)}{N_\alpha(r,0;f)}$$

und der Gleichung

$$\delta_\alpha(0;f) = 0$$

findet man

$$\delta_\alpha(0;w) \leq \frac{1}{2},$$

so daß der zweite Fall gilt. Damit ist die Abhängigkeit vom Ursprung der Ausschöpfungsfolge für alle δ_α-Defekte $(0 \leq \alpha \leq 1)$ nachgewiesen.

Literaturverzeichnis

Ahlfors, L.V.

[1] Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 8, Nr. 10 (1935), 14 S.

[2] Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math. 65 (1935), 157 - 194.

Ahlfors, L.V.; Sario, L.

[3] Riemann surfaces. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960, 382 S.

Borel, E.

[4] Démonstration élémentaire d'un theorème de M. Picard sur les fonctions entières. C.R. Acad. Sci. Paris 122 (1896), 1045 - 1048.

Chern, S.S.

[5] Complex analytic mappings of Riemann surfaces. I. Amer. J. Math. 82 (1960), 323 - 337.

Dinghas, A.

[6] Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. Math. Z. 44 (1938), 568 - 572.

[7] Vorlesungen über Funktionentheorie. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 110. Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1961, 403 S.

[8] Über eine Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriffes. Norske Vid. Selsk. Forh. 34, Nr. 25 (1961), 116 - 123.

[9] Über den Picard - Borelschen Satz und die Nevanlinnaschen Ungleichungen. J. Math. P. Appl. (9) 42 (1963), 223 - 251.

[10] Der Weierstraßsche Satz und die Anfänge der Werteverteilungstheorie. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815 - 1965. Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein - Westfalen. 33, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1966, 169 - 181.

Dugué, D.

[11] Le défaut au sens de M. Nevanlinna dépend de l'origine choisie. C.R. Acad. Sci. Paris 225 (1947), 555 - 556.

Evans, G.C.

[12] Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions. Monatsh. Math. Phys. 43 (1936), 419 - 424.

Green, G.

[13] Ein Versuch die mathematische Analysis auf die Theorieen der Elektrizität und des Magnetismus anzuwenden. Veröffentlicht 1828 in Nottingham. Oswalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Engelmann Verlag, Leipzig 1895, 140 S.

Hadamard, J.

[14] Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. J. Math. (4) 9 (1892), 171 - 215.

af Hällström, G.

[15] Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. Dissertation Helsinki, 1939. Acta Acad. Abo. Math. Phys. 12, Nr. 8 (1939), 100 S.

Heins, M.

[16] Riemann surfaces of infinite genus. Ann. Math. (2) 55 (1952), 296 - 371.

von Kerékjártó, B.

[17] Vorlesungen über Topologie I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 8. Springer Verlag, Berlin 1923, 270 S.

Myrberg, L.

[18] Über das Verhalten der Greenschen Funktionen in der Nähe des idealen Randes einer Riemannschen Fläche. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, Nr. 139 (1952), 8 S.

[19] Über meromorphe Funktionen und Kovarianten auf Riemannschen Flächen. Ebenda, A I, Nr. 244 (1957), 18 S.

[20] Über meromorphe Funktionen auf endlich vielblättrigen Riemannschen Flächen. I,II,III. Ebenda, A I, Nr. 286 (1960), 17 S.; Nr. 301 (1961), 9 S.; Nr. 311 (1962), 7 S.

Myrberg, P.J.

[21] Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Acta Math. 61 (1933), 39 - 79.

Nakai, M.

[22] On Evans potential. Proc. Japan Acad. 38 (1962), 624 - 629.

Nevanlinna, R.

[23] Untersuchungen über den Picardschen Satz. Acta Soc. Sci. Fenn. 50, Nr. 6 (1924), 42 S.

[24] Über den Picard - Borelschen Satz in der Theorie der ganzen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fenn. 23, Nr. 5 (1924), 37 S.

[25] Zur Theorie der meromorphen Funktionen. Acta Math. 46 (1925), 1 - 99.

[26] Le théorème de Picard - Borel et la theorie des fonctions méromorphes. Gauthier - Villars, Paris, 1929, 174 S.

[27] Eindeutige analytische Funktionen. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, 46. Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 2. Aufl. 1953, 379 S.

Noshiro, K.

[28] Open Riemann surface with null boundary. Nagoya Math. J. 3 (1951), 73 - 79.

Noshiro, K.; Sario, L.

[29] Integrated forms derived from nonintegrated forms of value distribution theorems under analytic and quasi-conformal mappings. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815 - 1965. Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein - Westfalen. 33, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1966, 319 - 324.

Osgood, W.F.

[30] Lehrbuch der Funktionentheorie I. Teubners Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften, 20,1. Teubner Verlag, Leipzig - Berlin, 5. Aufl. 1928, 818 S.

Parreau, M.

[31] Variation du défaut d'Ahlfors avec l'origine du plan des z. C.R. Acad. Sci. Paris 227 (1948), 1198 - 1199.

Picard, E.

[32] Sur une propriété des fonctions entières. C.R. Acad. Sci. Paris 88 (1879), 1024 - 1027.

Sario, L.

[33] Capacity of the boundary and of a boundary component. Ann. Math. (2) 59 (1954), 135 - 144.

[34] The second fundamental theorem of meromorphic functions on

abstract Riemann surfaces. Contract DA-04-495-ORD-722. Office of Ordnance Research, U.S. Army. Tech. Rep. 18, September 1960, 16 S. A Picard type theorem on open Riemann surfaces. Ebenda, Tech. Rep. 20, Oktober 1960, 17 S. Meromorphic maps of arbitrary Riemann surfaces. Ebenda, Tech. Rep. 22, November 1960, 18 S.

[35] Meromorphic functions and conformal metrics on Riemann surfaces. Pacific J. Math. 12 (1962), 1079 - 1097.

[36] Analytic mappings between arbitrary Riemann surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 633 - 637.

[37] Islands and peninsulas on arbitrary Riemann surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 521 - 533.

[38] Value distribution under analytic mappings of arbitrary Riemann surfaces. Acta Math. 109 (1963), 1 - 10.

[39] General value distribution theory. Nagoya Math. J. 23 (1963), 213 - 229.

[40] Second main theorem without exceptional intervals on arbitrary Riemann surfaces. Michigan Math. J. 10 (1963), 207 - 219.

[41] A theorem on mappings into Riemann surfaces of infinite genus. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 276 - 284.

Sario, L.; Noshiro, K.

[42] Value distribution theory. The university series in higher mathematics. Van Nostrand Co., Princeton, N.J., 1966, 236 S.

Selberg, H.L.

[43] Über die ebenen Punktmengen von der Kapazität Null. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo Nr. 10 (1937), 10 S.

Springer, G.

[44] Introduction to Riemann surfaces. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, M., 1957, 307 S.

Tamura, J.

[45] Meromorphic functions on open Riemann surfaces. Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo 9 (1959), 175 - 186.

Tsuji, M.

[46] On the behavior of a meromorphic function in the neighborhood of a closed set of capacity zero. Proc. Imp. Acad. Tokyo 18 (1942), 213 - 219.

[47] Theory of meromorphic functions in a neighborhood of a closed set of capacity zero. Japan J. Math. 19 (1944), 139 - 154.

[48] Existence of a potential function with a prescribed singularity on any Riemann surface. Tôhoku Math. J. 4 (1952), 54 - 68.

[49] Theory of meromorphic functions on an open Riemann surface with null boundary. Nagoya Math. J. 6 (1953), 137 - 150.

[50] Potential theory in modern function theory. Maruzen Co., Tokyo, 1959, 590 S.

Valiron, G.

[51] Valeurs exceptionelles et valeurs déficientes des fonctions méromorphes. C.R. Acad. Sci. Paris 225 (1947), 556 - 558.

Weierstraß, K.

[52] Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876, 11 - 60; Abhandlungen aus der Funktionenlehre, 1 - 52. Mathematische Werke II, Mayer und Müller, Berlin, 1895, 77 - 124.

Lebenslauf

Am 17. April 1939 wurde ich, Heinrich Begehr, als Sohn des Dipl. Z. Ing. Adolf Begehr und seiner Ehefrau Margot geb. Kebbel in Halle an der Saale geboren. Im Herbst 1945 wurde ich eingeschult und kam 1950 in Schleswig in die Oberschule, wohin meine Eltern mit meinen beiden Schwestern und mir 1949 geflüchtet waren. 1955 zogen wir nach Braunschweig. Dort erlangte ich Ostern 1959 das Reifezeugnis am mathematisch - naturwissenschaftlichen Zweig der Gaußschule.

Bis zum Beginn meines Mathematikstudiums im Wintersemester 1960/61 an der Freien Universität Berlin erfüllte ich vorzeitig meine Wehrpflicht. Im Wintersemester 1965/66 erhielt ich das Diplom in Mathematik und bin seit dem folgenden Sommersemester Assistent von Herrn Professor Dr. A. Dinghas am 1. Mathematischen Institut der Freien Universität.

1966 heiratete ich Fräulein Ingrid Krause. Wir haben ein Kind.